Matemáticas en Física - 2019 **G A Silva**
Departamento de Física - UNLP silva@fisica.unlp.edu.ar

Práctica IV: Algebra lineal

1. A partir de los axiomas de espacio vectorial

   a) $\mathbf{0}$: Existencia de identidad aditiva para vectores
   b) adición de vectores conmutativa y asociativa
   c) $(-\mathbf{v})$: existencia de inverso aditivo $\forall\ \mathbf{v}$
   d) propiedades distributivas y asociativas para el producto de un vector por un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$
   e) 1: existencia de identidad escalar $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

   Mostrar: (i) si $\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{0}} = \mathbf{x}$, entonces $\tilde{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$, (ii) si $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$, luego el inverso aditivo es único, (iii) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$

2. Sea V el espacio de las funciones continuas en $[a, b]$ con $b > a > 0$ y sean n y m dos números enteros distintos. Mostrar que las funciones x^n y x^m son linealmente independientes.

3. Dados $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$: (i) Analizar si son linealmente independientes, (ii) Normalizarlos, (iii) Verificar que son generadores de $\mathbb{R}^2$ hallando $[\mathbf{x}]_v$, las componentes de $\mathbf{x} = (x\ y)$ en la base $\{\mathbf{v}_i\}$

4. Dado el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_i\} = \{(1, 0, -1), (-1, 2, 1), (2, -1, 3)\}$: (a) Demostrar que son base de $\mathbb{R}^3$, (b) Hallar las componentes del vector $\mathbf{w} = (a, b, c)$ en la base $\{\mathbf{v}_i\}$, (c) Hallar las componentes cuando $\mathbf{w} = (2, -5, -1)$.

5. Determinar si el conjunto de matrices antisimétricas 3×3 es un espacio vectorial. De serlo hallar una posible base.

6. Sean $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{w} = w^i\mathbf{e}_i$. Mostrar que si el conjunto $\{\mathbf{e}_i\}$ es linealmente independiente, luego

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \implies v^i = w^i\ \forall i$$

   Construir un contraejemplo donde $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ pero $v^i \neq w^i$ siendo $\{\mathbf{e}_i\}$ un conjunto linealmente dependiente.

7. Siendo $[\mathbf{v}]_e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ las componentes de $\mathbf{v}$ en la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

   (a) Expresar $\mathbf{v}$ en términos de la base $\{\mathbf{f}_i\}$ hallando $[\mathbf{v}]_f$ donde $\mathbf{f}_1 = (2, 1)$ y $\mathbf{f}_2 = (1, 2)$
   (b) Hallar la matriz $S = C^{f\to e}$ de cambio de base $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i S^i{}_j$. Mostrar que $\det C^{f\to e} \neq 0$
   (d) Hallar $S^{-1} = C^{e\to f}$ y verificar que $[\mathbf{v}]_e = S[\mathbf{v}]_f$
   (e) Teniendo en cuenta la notación[1] de índices $\mathbf{v} = \underset{(e)}{v^i}\mathbf{e}_i$, concluir que los índices de la matriz de cambio de base indicados arriba $S^i{}_j$ son correctos.

8. Reflexión en el plano: consideremos la transformacion lineal $F(\mathbf{v})$ que se obtiene al reflejar $\mathbf{v}$ respecto de la recta $y = x$. Verificar que la misma queda definida mediante

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \qquad F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$$

   (a) Hallar las componentes de matriz de F en la base canónica $[F]_e$.
   (b) Hallar las componentes del vector transformado $\mathbf{v}' = F(\mathbf{v})$ en la base canónica.
   (c) Determinar los autovectores y autovalores de F

[1] Mas arriba denotamos $\underset{(e)}{v^i} = [\mathbf{v}]_e$, tradicionalmente se omite el subíndice (e) al denotar las componentes de un vector: v^i.

9. Sea V el conjunto de polinomios de grado $\leq n$: $V = \{p(t) : p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, a_i \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Mostrar que V es un espacio vectorial y determinar su dimensión.

   Considerar el operador de derivación $D(p(t)) = p'(t)$, y la base $\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = t, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}t^2, \ldots \mathbf{e}_n = \frac{1}{n!}t^n$.

   (b) Mostrar que D es un operador lineal en V.

   (c) Hallar la representación matricial $[D]_e$.

10. Mostrar que las funciones $f_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, constituyen un sistema ortonormal de funciones en el espacio de las funciones continuas en $[-\pi, \pi]$ respecto del producto interno $\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^* g(x) dx$

11. Determinante de Vandermonde: considerar la matriz

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \ldots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \ldots & (x_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \ldots & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix}$$

   Mostrar que su determinante puede ser expresado como

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \qquad (*)$$

   Ayuda: $\det(V)$ será un polinomio homogéneo en x_i de grado $(n-1)n/2$ y $x_i = x_j$ será un cero del mismo. Con esta información factorizarlo, determinar la constante global y concluir (*).

12. Dedicado a Mati: Autovalores, autovectores y sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas. Considerar el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 3y + z \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + z \\ \frac{dz}{dt} &= 2z \end{aligned} \qquad (1)$$

   i) Expresar las ecuaciones anteriores en forma matricial llevandolas a la forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v} \qquad (2)$$

   donde $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   ii) diagonalizar $A = S\,D\,S^{-1}$ hallando[2] S. Definiendo $\mathbf{y} = S^{-1}\mathbf{x}$ las componentes de $\mathbf{y}$ se desacoplan. Resolverlas, y concluir que el resultado puede ser expresado como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \qquad (3)$$

   donde $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ son los autovalores y autovectores de A.

   iii) Hallar

$$e^{At} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

   luego la solución de (2) puede ser expresada como

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\,\mathbf{x}(0) \qquad (4)$$

   Compatibilizar las expresiones (3) y (4) hallando la relación entre $\mathbf{x}(0)$ y c_i.

[2] Verificar que la matriz S se construye a partir de los autovectores. Esto es, sus columnas son los autovectores de la matriz A.