 silva@fisica.unlp.edu.ar

Práctica III: Taylor. Nabla. Coordenadas curvilíneas. Convención de Einstein. Dirac insight.

1. Trabajando a $O((\delta x)^3)$, escribir el desarrollo de Taylor de $f(x+\delta x)$. Para la función de tres variables $g(x,y,z)$, trabajando a $O(\delta x, \delta y, \delta z)$, escribir el desarrollo de Taylor de $g(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$.

2. (i) Siendo h una función de una variable. A partir de primeros principios hallar la derivada de

$$I(x) = \int_a^x h(y)dy$$

siendo a una constante

(ii) Siendo $f(x,y)$ una función de dos variables. De primeros principios calcular la derivada respecto de x de

$$J(x) = \int_a^x f(x,y)dy$$

3. (i) Hallar el volumen de un cono de altura h y radio a en coordenadas cilíndricas y esféricas.

(ii) Mediante un cambio de coordenadas adecuado hallar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

4. Mostrar que si $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ $(i,j = 1,2,3)$ y $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, entonces

$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

5. (i) Calcular $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ y $\nabla \times \boldsymbol{r}$ siendo $\boldsymbol{r}$ el vector posición.

(ii) Mostrar que si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ donde $\boldsymbol{w}$ es un vector constante y $\boldsymbol{r}$ es el vector posición, entonces $\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{w}$. Comentar.

6. Siendo $\psi(\boldsymbol{r})$ y $\chi(\boldsymbol{r})$ campos escalares y $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ y $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ campos vectoriales, mostrar que

(i)
$$\nabla \times \nabla\psi = \mathbf{0}$$

(ii)
$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

(iii)
$$\nabla \times (\psi \boldsymbol{v}) = \nabla\psi \times \boldsymbol{v} + \psi\, \nabla \times \boldsymbol{v}$$

(iv)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v}$$

y por lo tanto

$$\nabla \cdot (\nabla\psi \times \nabla\chi) = 0$$

(v)
$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

7. A partir de las ecuaciones

$$\nabla \times \mathbf{B} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

Mostrar que

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

8. El campo escalar $\varphi = \varphi(r)$ solo depende de $r = |\boldsymbol{r}|$. Usando coordenadas cartesianas y notación de índices mostrar que

$$\nabla\varphi = \varphi'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \qquad \nabla^2\varphi = \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r)$$

Verificar el resultado a partir de la expresión del laplaciano en esféricas.

9. (i) Sea $\boldsymbol{A} = (\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x, 0)$, mostrar que rot $\boldsymbol{A} = 0$ y hallar ϕ tal que $\boldsymbol{A} = \nabla\phi$. Es único ϕ? Graficar $\boldsymbol{A}$ y las curvas de nivel de ϕ en el plano xy. Cuál es la relación?

   (ii) El campo vectorial $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ en coordenadas cartesianas, ciliíndricas y esféricas toma la forma

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}y\,\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}x\,\boldsymbol{e}_y = \frac{1}{2}\rho\,\boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{2}r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi$$

   Hallar $\nabla\times\boldsymbol{A}$ en los tres sistemas de coordenadas y verificar que los resultados coinciden.

10. Verificar que el vector

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y), e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y), 0)$$

   es irrotacional y expresarlo como el gradiente de un campo escalar ϕ. Chequear que también es solenoidal, y luego, puede ser expresado, alternativamente, como el rotor de un campo $\boldsymbol{v} = (0, 0, \psi)$, para una elección de ψ apropiada.

11. Verificar el teorema de Stokes para la cáscara semiesférica $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ y el campo vectorial

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = (y, -x, z)$$

12. Siendo $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (x^3 + 3y + z^2, y^3, x^2 + y^2 + 3z^2)$ y S la superficie abierta

$$1 - z = x^2 + y^2, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

   Usar el teorema de Gauss y coordenadas cilíndricas para evaluar $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$. Verificar el resultado calculando la integral de superficie directamente.

   Ayuda: deberías hallar $d\boldsymbol{S} = (2\rho\cos\phi, 2\rho\sin\phi, 1)\rho d\rho d\phi$

13. Evaluar las siguiente integrales de linea

$$\int (xdx + ydy + zdz), \quad \int (ydx + xdy + dz), \int (ydx - xdy + e^{x+y}dz),$$

   a lo largo de: (i) la recta que une el origen con el punto $(1, 1, 1)$ y (ii) el arco parabólico dado por $\boldsymbol{r}(t) = (t, t, t^2)$ desde $t = 0$ a $t = 1$.

   Para cuáles de las integrales obtenemos el mismo resultado para ambos caminos? Por qué?

14. Mostrar que para las componentes de un vector a_i $(i = 1, 2, 3)$ vale

$$\sum_{i=1}^{3} a_j\delta_{ij} = a_i$$

   donde δ_{ij} es la delta de Kronecker

15. Siendo $i, j, k, l, m = 1, 2, 3$ y $\mathbf{n}$ un vector unitario $n_i n_i = 1$:

   (i) Simplificar las siguientes expresiones:

$$\delta_{ij}a_j, \quad \delta_{ij}\delta_{jk}, \quad \delta_{ij}\delta_{ij}, \quad \delta_{ij}n_i n_j, \quad \epsilon_{ijk}\delta_{jk}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ikj}, \quad \epsilon_{ijk}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_k$$

   (ii) Reexpresar cada una de las siguientes expresiones en forma vectorial o matricial o explicar si son incorrectas y no tienen sentido

$$x_i = a_i b_k c_k + d_i, \quad x_i = a_j b_i + c_k d_i e_k f_j, \quad u = \epsilon_{jkl}v_k w_l x_j$$

$$\epsilon_{ijk}x_j y_k \epsilon_{ilm}x_l y_m = \mu, \quad A_{ik}B_{kl} = T_{ik}\delta_{kl}, \quad x_k = A_{ki}B_{ji}y_j$$

   (iii) Dada $A_{ij} = \epsilon_{ijk}a_k$ mostrar que $2a_k = \epsilon_{kij}A_{ij}$

16. Verificar las siguientes identidades: (i) $\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j V_k = 0$, (ii) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$, (iii) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

Complicados:

17. Las coordenadas parabólicas (u, v, ϕ) se definen a partir de las cartesianas (x, y, z) como

$$x = uv\cos\phi, \qquad y = uv\sin\phi, \qquad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

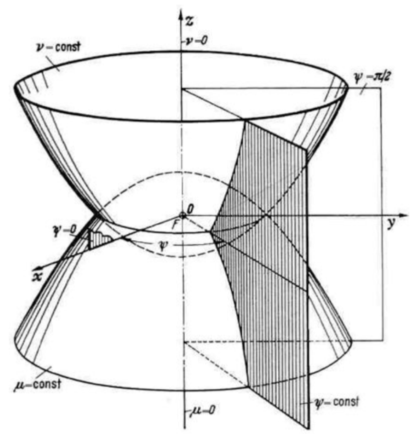

Figura 1: Coordendas parabólicas.

Mostrar que las superficies de u y v constantes se obtienen rotando parabolas alrededor del eje z. Qué superficies son $\phi = cte.$? Mostrar que las superficies se intersectan en ángulos rectos, de manera que constituyen un sitema de coordenadas ortogonal. Hallar los factores de escala (h_u, h_v, h_ϕ) definidos a partir de

$$ds^2 = |d\boldsymbol{r}|^2 = h_u^2 du^2 + h_v^2 dv^2 + h_\phi^2 d\phi^2$$

Obtener una expresión para el laplaciano en este sistema de coordenadas a partir de

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + [\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) + [\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right]$$

18. Delta de Dirac

Para $\epsilon > 0$, sea $\Phi_\epsilon(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} + \epsilon)^{-1}$. Mostrar que

$$\nabla^2\Phi_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{-2\epsilon}{|\boldsymbol{x}|(\boldsymbol{x}+\epsilon)^3}$$

Si φ es un campo escalar que decae rápidamente cuando $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ y $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ es un vector fijo, hallar

$$\lim_{\epsilon\to 0}\iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{x})\,\nabla^2\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\,dV$$

Deducir que $\nabla^2\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|}\right) = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$

19. Monopolo de Dirac

(i) Sea $S = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| = 1\}$. Hallar el flujo

$$\oint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$$

de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}/r^3$ sobre S, donde $r = |\boldsymbol{x}|$. Deducir que no existe un potencial vector para $\boldsymbol{F}$. Calcular $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ y comentar el resultado.

(ii) Considerar

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, 0\right)$$

Mostrar que $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$, donde $\boldsymbol{F}$ es el dado en el item (i). Confrontar con el item (i), existe una contradicción?. Reconciliar los resultados aplicando Stokes a la superficie
$S_\epsilon = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| = 1, x^2+y^2 \geq \epsilon^2\}$ y tomando un límite apropiado.

(iii) Mostrar que una de las singularidades en los polos N/S puede ser eliminada si sumamos a la expresión anterior un múltiplo apropiado del siguiente vector

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{y}{(x^2+y^2)}, -\frac{x}{(x^2+y^2)}, 0\right)$$

El campo vectorial así obtenido contiene una *'cuerda de Dirac'*. A lo largo del semieje z.