Práctica II: Taylor. Geometría diferencial de curvas en el espacio.

1. (i)Hallar el desarrollo de Taylor de $\sin x$ centrado en $x_0 = \pi/4$.

   (ii) Hallar el desarrollo de Taylor de $1/(1+x)$ en potencias de $(x-1)$ a partir de la serie geometrica. Establecer el intervalo de convergencia de la serie obtenida

   (iii) Hallar el desarrollo de Taylor de $\log(1+x)$ en potencias de $(x-1)$. Establecer el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

   (iv) Hallar el desarrollo de Taylor de $\cosh x$ centrado en $x = 0$ y establecer el intervalo de convergencia.

   (v) Hallar el desarrollo de Taylor de e^{-1/x^2} centrado en el origen. Discutir el resultado.

2. Describir paramétricamente un círculo de radio 3 centrado en $(2, 0)$. Hallar los vectores velocidad y aceleración. En qué dirección se encuentran orientados?

3. (i) Dada la curva $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (3t, t^2 + 4)$ para $t \in \mathbb{R}$. Eliminar t y reexpresarla como $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x))$. Graficarla y describir la forma de la curva.

   (i') Considerar $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^2, 3t^2 + 4)$ para $t \in \mathbb{R}$. Eliminar t y reexpresarla como $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x))$. Graficarla y describir la forma de la curva. Compara con (i)

   (ii) Considerar las siguientes curvas $\boldsymbol{r}_1(t) = (t, \frac{t^2}{9} + 4)$, $\boldsymbol{r}_2(t) = (3t, t^2 + 4)$, $\boldsymbol{r}_3(t) = (-3t, t^2 + 4)$. Eliminar t, graficarlas y mostrar que describen la misma curva en el plano. Calcular el vector tangente $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ para cada una de las curvas en el punto $\boldsymbol{r} = (3, 5)$ del plano. Coinciden?

   (iii) Considerar la curva $\rho(\theta) = 4\cos\theta$ en coordenadas polares en el plano. Eliminar (ρ, θ) en favor de coordenadas cartesianas (x, y) y hallar qué curva describe.

   (iv) Graficar la curva $\boldsymbol{r}(t) = (t^3, t^2)$. Analizar el comportamiento en el origen.

   Considerar $\boldsymbol{r}(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ y mostrar que corresponde a la *cúbica nodal* $y^2 = x^3 + x^2$.

   (v) Mostrar que la curva $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{t(t^2-1)}{1+t^2})$ es una representación paramétrica de los puntos del plano que verifican,

   $$(x^2 + y^2)(x - 2) + x = 0$$

   Notar que la aplicación dada por $\boldsymbol{r}(t)$ no es inyectiva: $\boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{r}(-1)$

4. Considerar la hélice descripta por $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$. Mostrar que la parametrización $\boldsymbol{r}(s) = (a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c})$ donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ corresponde a parametrización afín. Hallar la curvatura y torsión y mostrar que son constantes. Considerar el caso $b = 0$, luego la curva se encuentra contenida en un plano. Cómo se manifiesta esto en términos de $\tau(t)$?

5. Hacer un bosquejo de la curva en el plano $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in (0, 2\pi)$. Calcular $\boldsymbol{r}'(t)$ para todo punto de la curva y luego la longitud total de la misma. Indicar la dirección de los vectores $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$

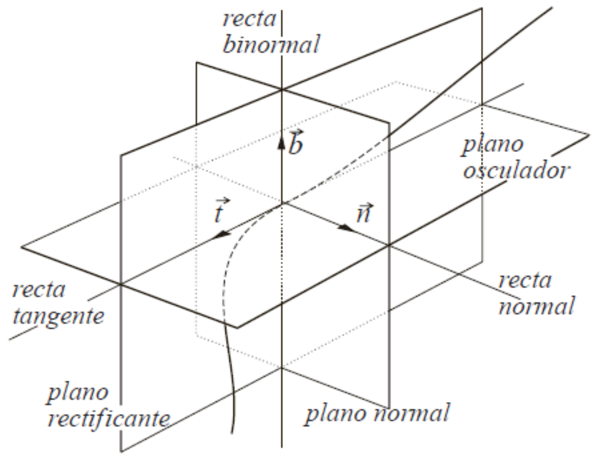
6. Mostrar que si $|\boldsymbol{r}(t)| = cte$ entonces $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t) = 0$. Esto es, si el módulo de un vector es constante (la partícula se mueve sobre un círculo/esfera centrado/a en el origen), el vector velocidad es ortogonal a la posición en todo punto de la trayectoria.

7. Mostrar que para el caso de curvas en el plano $\boldsymbol{r}(t) = (t, f(t))$ la curvatura resulta

   $$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}}$$

8. A partir de lass definiciones $\boldsymbol{t}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t)/|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|$, $\boldsymbol{n}(t) = \dot{\boldsymbol{t}}(t)/|\dot{\boldsymbol{t}}(t)|$ y $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{t}(t) \times \boldsymbol{n}(t)$ mostrar que

   $$\boldsymbol{n}(t) = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)| \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}$$



9. Mostrar que la aceleración solo tiene componentes en los vectores tangencial y normal: $\boldsymbol{a}(t) \equiv \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = a_N(t)\,\boldsymbol{n}(t) + a_T\,\boldsymbol{t}(t)$. Donde

$$a_T(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|, \qquad a_N(t) = v^2(t)\,\kappa(t)$$

Alternativamente

$$a_T(t) = \boldsymbol{t}(t) \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|}, \qquad a_N(t) = |\boldsymbol{t}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)| = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|}$$

10. A partir de las ecuaciones de Frenet-Serret hallar las expresiones para la curvatura y torsión

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^3}, \qquad \tau(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot (\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \times \dddot{\boldsymbol{r}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|^2}$$

11. Mostrar que para una curva parametrizada afín $\boldsymbol{r}(s)$ se tiene $\boldsymbol{n}(s) = \ddot{\boldsymbol{r}}(s)/|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|$