Práctica I: Funciones. Sucesiones y Series

1. Graficos: Realizar un gráfico de la función $y(x)$

$$y(x) = \frac{x-3}{(x+1)(x-2)}$$

Indicar los posibles máximos y mínimos y mostrar que existe un rango de valores de y que no son alcanzados por la función si $x \in \mathbb{R}$.

2. Extremos locales: Analizar máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \sqrt[5]{(x+2)^4}$. Graficar la función.

3. Integrales I:

(i) Siendo $\tan y = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ hallar dy/dx para el intervalo $1 < x < 2$. Con esta información inferir el valor de la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx \qquad (1 < x < 2)$$

(ii) Adivinar la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt \qquad (a < x < b)$$

y verificar la propuesta.

(iii) Evaluar la integral en (ii) escribiendo el denominador en la forma $A^2 - (t-B)^2$ y hacer el cambio de variables $(t-B) = A\sin\theta$. Usando identidades trigonométricas verificar que el resultado obtenido coincide con la propuesta realizada en (ii).

4. Integrales II: Sea

$$I_n = \int_0^\infty \text{sech}^n u \; du$$

con $n > 0$. Integrando por partes mostrar que

$$\int_0^\infty (\text{sech}^{n+2} u \cdot \sinh u) \sinh u \; du = \frac{1}{n+1} I_n$$

y a partir de esta expresión deducir $(n+1)I_{n+2} = nI_n$. Hallar I_6.

Ayuda: $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\text{sech}x = (\cosh x)^{-1}$. Recordar que $\sinh^2 u = \cosh^2 x - 1$

5. Sucesiones: determinar si las siguientes sucesiones convergen o no.

(i) $a_n = \frac{n}{n+1}$, (ii) $a_n = \frac{\ln n}{n}$, (iii) $a_n = (1/2)^n$, (iv) $a_n = (n)^{1/n}$, (v) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, (vi) $a_n = (1 + \frac{a}{n})^n$, (vii) $a_n = \frac{n!}{n^n}$, (viii) $a_n = 2^n/n!$

Ayuda: tomar logaritmos en (iv), (v) y usar L' Hospital. (vii) Evaluar el cociente a_{n+1}/a_n y usar que toda sucesión monotona acotada converge

6. Convergencia de Series:

(i) Justificar por qué diverge $\sum_1^\infty \frac{n}{n+1}$. (ii) Hallar la suma de $\sum_1^\infty \frac{3^n}{5^{n+1}}$. (iii) Justificar los criterios de convergencia para las series p: $\sum_1^\infty 1/n^p$ usando el criterio de la integral impropia. (iv) Determinar si convergen o divergen: $\sum_1^\infty \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum_1^\infty \frac{1}{e^n}$, $\sum_1^\infty \frac{n}{n^2+1}$, $\sum_1^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$, $\sum_1^\infty \frac{1}{(n)^2 \ln n}$, $\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^n}$

7. (a) Hallar el desarrollo en serie de $f(x) = \arctan x$ relacionando $f'(x)$ con una serie geométrica e integrar término a término.

   (b) A partir de la expresión hallada en (a) mostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

   Es válido evaluar en el extremo de intervalo de convergencia? Por qué?

8. (i) Hallar el dominio de convergencia de las series de potencias de $\sin x$, $\cos x$ y e^x.

   (ii) Hallar el desarrollo en serie de $f(x) = 2^x$. Comparar con e^x.

   (iii) Hallar el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+3)^n}{n^3}$

   (iv) Hallar el radio de convergencia de $\sum_n (\cosh n) z^n$

9. (i) Mostrar que $\int_0^1 dx \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi^2}{8}$

   (ii) Escribiendo $\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, hallar el desarrollo en serie: $\sin^{-1} x = \sum_0^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Determinar el dominio de convergencia.

   (iii) Sea $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$. Mostrar que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ y luego $I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

   Deducir que $\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

   A partir de $4\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ deducir que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, donde $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

10. Para todo polinomio f, el teorema de factorización establece que $f(a) = 0$ sii $f(x) = (x-a)g(x)$ donde $g(x)$ es otro polinomio. Por analogía, mostrar que el resultado (correcto)

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\dots \qquad (*)$$

   es plausible.

   (i) A partir de este resultado derivar la formula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots$$

   Ayuda: evaluar (*) para $x = 1/2$ y masajear

   Usar (*) y la identidad trigonométrica que relaciona los ángulos dobles para $\sin 2\pi x$ obteniendo un producto infinito para $\cos \pi x$. Asimismo obtener una producto infinito para $\sqrt{2}$

   (ii) Considerando el desarrollo de Taylor de $\sin \pi x$ reobtener el resultado para $\zeta(2)$ del ejercicio anterior. Obtener la expresión para $\zeta(4)$.