Matemáticas en Física - 2024 **C. A. Lamas**
Departamento de Física - UNLP lamas@fisica.unlp.edu.ar

Práctica V: Variable compleja

Los ejercicios marcados con * son obligatorios

—

1. (a) * Mostrar que el inverso respecto del producto, denotado como z^{-1} para un número complejo z, existe para todo $z \neq 0$ y que
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$
siendo $z = a + ib$.

   (b) * Mostrar que dados dos números complejos z_1, z_2, su producto toma una forma muy sencilla en la forma polar
$$z_1 z_2 = w, \quad \text{donde } |w| = |z_1||z_2| \text{ y } arg(w) = arg(z_1) + arg(z_2)$$
Dado un número complejo z interpretar geométricamente $e^{i\alpha}z$ como una rotación de ángulo α del mismo.

   (c) * Mostrar que $|zw| = |z||w|$ y que $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

2. (a) Mostrar que $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2\pi n)}$ si $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

   (b) Según el teorema fundamental del álgebra todo polinomio de orden n tiene n raices. Calcular las soluciones de $z^n = 1$, o, en otras palabras, las n raices de la unidad. Hacer al cálculo expresando z en coordenadas polares y graficar en el plano complejo las soluciones obtenidas.

   (c) Hallar las raices $(-1 + i)^{1/3}$ y $(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$ y graficarlas.

   (d) Resolver la ecuación $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

3. (a) Mostrar que la suma y el producto de todas las raices de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ donde $a_0 \neq 0$ son $-a_1/a_0$ y $(-)^n a_n/a_0$ respectivamente.

   Ayuda: considerar haber factorizado el polinomio y multiplicar término a término
   $p(z) = a_0(z - z_1) \ldots (z - z_n)$

   (b) Mostrar que la suma de las n raices de la unidad es cero. Interpretar geométricamente.

4. (i) Mostrar que $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, (ii) $\sin(iz) = i \sinh z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, (iii) $\cosh z = 0 \iff z = (\frac{\pi}{2} + n\pi)i$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5. (i) * Siendo $f(z) = \frac{1}{z}$ hallar las componentes real e imaginaria de $f = u + iv$ y verificar si satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

   (ii) * Hallar los valores de $k \in \mathbb{C}$ para los cuales $u(x, y) = x^3 - kxy^2 + 12xy - 12x$ es la parte real de una función holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

6. * Considerar la función $f(z) = z^2$ y sean $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ y $\delta : [1, 2] \to \mathbb{C}$ las curvas $\gamma(t) = t^2 + it$ y $\delta(t) = t + i$. Graficarlas en el plano z. Considerar la curva obtenida por composición de las mismas $\Gamma = \gamma \cup \delta$ y calcular
$$\int_\Gamma f(z) dz$$
(a) explicitamente y (b) hallando la primitiva.

7. (a) Hallar los primeros dos coeficientes del desarrollo en serie de potencias en un entorno del origen para:
$$(i)\ z/\log(1+z), \qquad (ii)\ (\cos z)^{1/2} - 1, \qquad (iii)\ \log(1 + e^z), \qquad (iv)\ e^{e^z}$$
Establecer el dominio de convergencia de la series.

   (b) Hallar los primeros tres términos del desarrollo de Laurent de $f(z) = \operatorname{cosec}^2 z$ válido para $0 < |z| < \pi$

(c) Localizar los puntos singulares de:

$$\frac{z^3}{(z-1)^2},\ \tan z,\ z\coth z,\ \frac{e^z - e}{(1-z)^3},\ e^{(\tan z)},\ \sinh\frac{z}{z^2-1},\ \log(1+e^z),\ \tan(z^{-1})$$

y evaluar sus residuos.

8. Usando el teorema de los residuos evaluar:

$$(i)\ \oint_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$$

donde γ es el círculo $|z| = \sqrt{2}$ recorrido en sentido antihorario.

9. Mostrar que

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\lambda|}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

Ayuda: integrar a lo largo del rectángulo de vértices $z = \pm R$ y $z = \pm R + 2\pi i$

(c) Intentar evaluar por métodos tradicionales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

comparar con el cálculo por residuos.

Ecuaciones diferenciales

10. * i. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

    (a) $\frac{dv}{dt} = -g$, (b) $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, (c) $L\frac{dI}{dt} + RI = \epsilon(t)$, (d) $y' = \tan y$, (e) $yy' = 1$, (f) $y'^2 = xy$

    * ii. Indicar cuáles son lineales, y cuáles tienen fuentes.

    * iii. Interpretar físicamente las ecuaciones (a), (b) y (c).

11. * Caída no tan libre: Considerar un cuerpo de masa m que cae bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. Tener en cuenta el efecto de la resistencia del aire modelando la fuerza de rozamiento con el aire como proporcional a la velocidad del cuerpo v. Llamando b al factor de proporcionalidad con la velocidad y considerando la aceleración debida a la gravedad como constante, g:

    (i) * Plantear la ecuación de movimiento en términos de la velocidad $v(t)$ y resolverla considerando que la partícula parte del reposo

    (ii) * Hallar $v(t)$ para tiempos largos, a.k.a. velocidad límite.

12. Ecuaciones diferenciales y series de potencias: resolver la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dN}{dt} = -kN^2$$

    (a) Mediante integración directa, a.k.a cuadraturas.
    (b) Proponiendo una serie de potencias en t:

$$N(t) = n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \dots$$

    Hallar los valores de n_i imponiendo que $N(t)$ sea solución de la ecuación diferencial.

    Considerar el caso $k < 0$ (i.e. $\frac{dN}{dt} = \alpha N^2$ con $\alpha > 0$) y mostrar que la solución $N(t)$ diverge en un tiempo finito (comportamiento explosivo). Analizar el comportamiento de los coeficientes de la serie de potencias y evaluar su radio de convergencia.

13. *Ecuaciones diferenciales lineales: hallar las soluciónes generales de:

    (i) $y'' + 2y' + y = 0$, (ii) $y^{(4)} - y = 0$, (iii) $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$

14. Variación de parámetros. Solución particular: existe un método general para resolver el problema de la solución particular de una ecuación diferencial lineal con fuentes,

$$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y = f(x) \quad \rightsquigarrow \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{1}$$

    `Receta`[1]:

    a. Resolver la solución del sistema homogéneo: $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, donde $y_{1,2}$ son L.I.

    b. La solución particular se encuentra proponiendo las constantes de integración C_i pasen a depender de x, $C_i \to u_i(x)$, luego

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{y}$$

    De manera que tenemos dos incógnitas a determinar $\boldsymbol{u} = (u_1(x), u_2(x)) \rightsquigarrow$ necesitamos 2 ecuaciones.

    c. Insertando la propuesta en (1) obtendremos una ecuación, a efectos de tener una segunda ecuación debemos imponer una condición sobre $\boldsymbol{u}$. Puesto que al derivar y_p obtenemos $y_p' = \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{y}'$, una condición que podemos imponer es $\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{y} = 0$. Tenemos entonces que la ecuación diferencial se reduce a

$$a(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{y}'') + b\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{y}' + c\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{y} = f \to \boldsymbol{u}\cdot\underbrace{(a\boldsymbol{y}'' + b\boldsymbol{y}' + c\boldsymbol{y})}_{=0} + a\,\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{y}' = f \to \boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{u}' = \frac{1}{a}f$$

    El sistema de ecuaciones para $\boldsymbol{u}$ resulta entonces

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}' = 0 \\ \boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{u}' = \frac{1}{a}f(x) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad W\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f} \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{u}' = W^{-1}\boldsymbol{f} \tag{2}$$

[1] Propuesta por Bernouilli para ecuaciones de 1er orden y luego por Lagrange para ecuaciones de 2do orden.

donde

$$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} f \end{pmatrix}$$

La solución de (2) se obtiene inmediatamente por cuadraturas

$$\boldsymbol{u}(x) = \int^x dx' W^{-1}(x') \boldsymbol{f}(x') \tag{3}$$

La matriz W se denomina Wrosnkiano del sistema y resulta ser no singular.

15. Campo Magnético constante: Considerar el movimiento de una partícula cargada en el plano xy bajo la acción de un campo magnético $\boldsymbol{B}$ transverso al plano. A partir de la fuerza de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ resolver el movimiento de la partícula expresando la ley de Newton $\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ en forma matricial como

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{v}(t) = e^{At}\mathbf{v}_0$$

Hallar e^{At} diagonalizando A.