Matemáticas en Física - 2024 **Carlos A. Lamas**
Departamento de Física - UNLP lamas@fisica.unlp.edu.ar

Práctica II: Desarrollo de Taylor. ∇. Convención de Einstein. Coordenadas curvilíneas.

LOS EJERCICIOS MARCADOS CON * SON OBLIGATORIOS

1. *(i)Hallar el desarrollo de Taylor de $\sin x$ centrado en $x_0 = \pi/4$.

   *(ii) Hallar el desarrollo de Taylor de $1/(1+x)$ en potencias de $(x-1)$ a partir de la serie geometrica. Establecer el intervalo de convergencia de la serie obtenida

   *(iii) Hallar el desarrollo de Taylor de $\log(1+x)$ en potencias de $(x-1)$. Establecer el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

   *(iv) Hallar el desarrollo de Taylor de $\cosh x$ centrado en $x = 0$ y establecer el intervalo de convergencia.

   (v) Hallar el desarrollo de Taylor de e^{-1/x^2} centrado en el origen. Discutir el resultado.

2. (i) Siendo h una función de una variable, a partir de primeros principios hallar la derivada de

$$I(x) = \int_a^x h(y)dy$$

   siendo a una constante

   (ii) Siendo $f(x,y)$ una función de dos variables. De primeros principios calcular la derivada respecto de x de

$$J(x) = \int_a^x f(x,y)dy \quad \rightsquigarrow \quad J'(x) = f(x,x) + \int_a^x \partial_x f(x,y)dy$$

3. (i) Hallar el volumen de un cono de altura h y radio a en coordenadas cilíndricas.

4. Mostrar que

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \epsilon_{ijk} c_i a_j b_k \quad \rightsquigarrow \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$$

5. *Mostrar que si $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ $(i,j = 1,2,3)$ y $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, entonces

$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

6. *Mostrar que para las componentes de un vector a_i $(i = 1,2,3)$ vale

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} a_j = a_i \quad \text{matricialmente } \; \mathbb{I} \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

   donde δ_{ij} es la delta de Kronecker

7. Siendo $i,j,k,l,m = 1,2,3$ y $\boldsymbol{n}$ un vector unitario $n_i n_i = 1$:

   *(i) Mostrar que la simplificación del lado izquierdo de las siguientes expresiones resulta en el lado derecho:

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}, \quad \delta_{ij}\delta_{ij} = 3, \quad \delta_{ij} n_i n_j = 1$$

   (ii) Mostrar las siguientes identidades:

$$\epsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ikj} = -6, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\epsilon_{ijk}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = a_i b_j - b_i a_j, \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

   (iii) Reexpresar cada una de las siguientes expresiones en forma vectorial o matricial o explicar si son incorrectas y no tienen sentido

$$x_i = a_i b_k c_k + d_i, \quad x_i = a_j b_i + c_k d_i e_k f_j, \quad u = \epsilon_{jkl} v_k w_l x_j$$

$$\epsilon_{ijk} x_j y_k \epsilon_{ilm} x_l y_m = \mu, \quad A_{ik} B_{kl} = T_{ik}\delta_{kl}, \quad x_k = A_{ki} B_{ji} y_j$$

   (iv) Dada $A_{ij} = \epsilon_{ijk} a_k$ mostrar que $\epsilon_{kij} A_{ij} = 2a_k$

8. Verificar la siguiente identidad: $\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j V_k = 0$ y mostrar que es equivalente a $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V}) = 0$.
9. *(i) Mostrar que $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ y $\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$ siendo $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ el vector posición.
   (ii) Mostrar que si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ donde $\boldsymbol{w}$ es un vector constante y $\boldsymbol{r}$ es el vector posición, entonces
   $$\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{w}$$
   Considerar $\boldsymbol{w} = (0, 0, 1)$ y graficar $\boldsymbol{v}$ para distintas posiciones en el plano xy.
10. Siendo $\psi(\boldsymbol{r})$ y $\chi(\boldsymbol{r})$ campos escalares y $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ y $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ campos vectoriales, mostrar que
    *(i)
    $$\nabla \times \nabla\psi = \mathbf{0}$$
    *(ii)
    $$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$
    (iii)
    $$\nabla \times (\psi\boldsymbol{v}) = \nabla\psi \times \boldsymbol{v} + \psi\, \nabla \times \boldsymbol{v}$$
    (iv)
    $$\nabla \cdot \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v}$$
    y por lo tanto
    $$\nabla \cdot (\nabla\psi \times \nabla\chi) = 0$$
    (v)
    $$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$
11. A partir de las ecuaciones
    $$\nabla \times \mathbf{B} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$
    Mostrar que
    $$\partial_t\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$