Matemáticas en Física - 2024 **Carlos A. Lamas**
Departamento de Física - UNLP lamas@fisica.unlp.edu.ar

Práctica I: Funciones, Sucesiones y Series

Los ejercicios marcados con * son obligatorios

1. *Graficos: Realizar un gráfico de la función $y(x)$

$$y(x) = \frac{x-3}{(x+1)(x-2)}$$

Indicar los posibles máximos y mínimos y mostrar que existe un rango de valores de y que no son alcanzados por la función si $x \in \mathbb{R}$.

2. *Extremos locales: Analizar máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \sqrt[5]{(x+2)^4}$. Graficar la función.

3. Integrales I:

(i) Siendo $\tan y = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ hallar dy/dx para el intervalo $1 < x < 2$. Con esta información mostrar que

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} dx = \pi$$

(ii) Inferir la integral

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} dt$$

(iii) Evaluar la integral en (ii) escribiendo el denominador en la forma $A^2 - (t-B)^2$ y hacer el cambio de variables $(t-B) = A \sin\theta$. Usando identidades trigonométricas verificar que el resultado obtenido coincide con la propuesta realizada en (ii).

4. Integrales II: Integrando por partes mostrar que

$$\int_0^\infty (\operatorname{sech}^{n+2} u \cdot \sinh u) \cdot \sinh u \, du = \frac{1}{n+1} I_n \,, \qquad n > 0 \tag{1}$$

donde

$$I_n = \int_0^\infty \operatorname{sech}^n u \, du \,.$$

A partir de (1) deducir la relación

$$(n+1)I_{n+2} = nI_n.$$

Hallar $I_6 = 8/15$.

Ayuda: $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\operatorname{sech} x = (\cosh x)^{-1}$ y $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$

5. *Sucesiones: determinar si las siguientes sucesiones convergen o no.

(i) $a_n = \frac{n}{n+1}$, (ii) $a_n = \frac{\ln n}{n}$, (iii) $a_n = (1/2)^n$, (iv) $a_n = (n)^{1/n}$, (v) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, (vi) $a_n = (1 + \frac{a}{n})^n$, (vii) $a_n = \frac{n!}{n^n}$, (viii) $a_n = 2^n/n!$

Ayuda: tomar logaritmos en (iv), (v) y usar L' Hôpital. (vii) Evaluar el cociente a_{n+1}/a_n y usar que toda sucesión monotona acotada converge

6. *Convergencia de Series:

(i) Justificar por qué diverge $\sum_1^\infty \frac{n}{n+1}$.
(ii) Hallar la suma de $\sum_1^\infty \frac{3^n}{5^{n+1}}$.
(iii) Usando el criterio de la integral impropia, justificar que $\zeta(p) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$.
(iv) Determinar si convergen o divergen:
$\sum_1^\infty \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum_1^\infty \frac{1}{e^n}$, $\sum_1^\infty \frac{n}{n^2+1}$, $\sum_2^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$, $\sum_2^\infty \frac{1}{(n)^2 \ln n}$, $\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^n}$

7. (a) Hallar el desarrollo en serie[1] de $f(x) = \arctan x$.

   (b) Hallar el intervalo de convergencia de la expresión obtenida.

   (c) A partir del desarrollo obtenido (2) mostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

   Es válido haber evaluado en el extremo de intervalo de convergencia? Por qué?

   (d) Hallar el desarrollo en serie de $f(x) = 2^x$. Comparar con el de e^x.

8. *Radios de convergencia: determinarlos para

   (i) $\sin x$, (ii) $\cos x$, (iii) e^x, (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+3)^n}{n^3}$, (v) $\sum_n (\cosh n) z^n$

9. Problema de Basilea: el problema es hallar el valor de la suma:

$$\boxed{S = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \ ?}$$

   (i) Mostrar que

$$\int_0^1 dx \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi^2}{8} \tag{3}$$

   (ii) Escribiendo $\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ y expandiendo en serie el denominador podemos hallar el desarrollo en serie del arcsin x:

$$\sin^{-1} x = \sum_{0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{4}$$

   Mostrar que el dominio de convergencia es $|x| < 1$.

   (iii) La idea es ahora insertar (4) en (3) e integrar término a término.

   Definiendo $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$, mostrar que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ y luego $I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. A partir de este último resultado insertando (4) en (3) e integrando término a término concluimos que

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \tag{5}$$

   Conocido este resultado, manipulando la suma que deseamos calcular mostrar que[2]

$$S = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

10. Usando integración por partes demostrar la formula de Taylor.

---

[1] **Ayuda**: relacionar $f'(x)$ con una serie geométrica. Integrando obtener

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \tag{2}$$

[2] **Ayuda**: la idea es relacionar la suma S sobre pares e impares con la suma que solo contiene impares (5). En efecto, $S = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots + 1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \dots$ puesto que $1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 + \dots = 1/4 \times S$, tenemos entonces que $3/4 \times S = ec.(5) \Rightarrow S = 4/3 \times ec.(5) = \pi^2/6$