

Práctica V: Variable compleja - Ecuaciones diferenciales

LOS EJERCICIOS MARCADOS CON * SON OBLIGATORIOS

1. (a) * Mostrar que el inverso respecto del producto, denotado como z^{-1} para un número complejo z , existe para todo $z \neq 0$ y que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

siendo $z = a + ib$.

- (b) * Mostrar que dados dos números complejos z_1, z_2 , su producto toma una forma muy sencilla en la forma polar

$$z_1 z_2 = w, \quad \text{donde } |w| = |z_1| |z_2| \text{ y } \arg(w) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Dado un número complejo z interpretar geoméricamente $e^{i\alpha} z$ como una rotación de ángulo α del mismo.

- (c) * Mostrar que $|zw| = |z||w|$ y que $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.

2. (a) * Mostrar que $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi n)}$ si $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(b) * Según el teorema fundamental del álgebra todo polinomio de orden n tiene n raíces. Calcular las soluciones de $z^n = 1$, o, en otras palabras, las n raíces de la unidad. Hacer al cálculo expresando z en coordenadas polares y graficar en el plano complejo las soluciones obtenidas.

(c) * Hallar las raíces $(-1 + i)^{1/3}$ y $(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$ y graficarlas.

(d) * Resolver la ecuación $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

3. (a) Mostrar que la suma y el producto de todas las raíces de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ donde $a_0 \neq 0$ son $-a_1/a_0$ y $(-1)^n a_n/a_0$ respectivamente.

Ayuda: considerar haber factorizado el polinomio y multiplicar término a término

$$p(z) = a_0(z - z_1) \dots (z - z_n)$$

(b) Mostrar que la suma de las n raíces de la unidad es cero. Interpretar geoméricamente.

4. (i) Mostrar que $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, (ii) $\sin(iz) = i \sinh z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, (iii) $\cosh z = 0 \iff z = (\frac{\pi}{2} + n\pi)i$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

5. (i) * Siendo $f(z) = \frac{1}{z}$ hallar las componentes real e imaginaria de $f = u + iv$ y verificar si satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

(ii) * Hallar los valores de $k \in \mathbb{C}$ para los cuales $u(x, y) = x^3 - kxy^2 + 12xy - 12x$ es la parte real de una función holomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

6. * Considerar la función $f(z) = z^2$ y sean $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\delta : [1, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ las curvas $\gamma(t) = t^2 + it$ y $\delta(t) = t + i$. Graficarlas en el plano z . Considerar la curva obtenida por composición de las mismas $\Gamma = \gamma \cup \delta$ y calcular

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

(a) explícitamente y (b) hallando la primitiva.

7. (a) Hallar los primeros dos coeficientes del desarrollo en serie de potencias en un entorno del origen para:

$$(i) z/\log(1+z), \quad (ii) (\cos z)^{1/2} - 1, \quad (iii) \log(1+e^z), \quad (iv) e^{e^z}$$

Establecer el dominio de convergencia de la series.

(b) Hallar los primeros tres términos del desarrollo de Laurent de $f(z) = \operatorname{cosec}^2 z$ válido para $0 < |z| < \pi$

(c) Localizar los puntos singulares de:

$$\frac{z^3}{(z-1)^2}, \tan z, z \coth z, \frac{e^z - e}{(1-z)^3}, e^{(\tan z)}, \sinh \frac{z}{z^2-1}, \log(1+e^z), \tan(z^{-1})$$

y evaluar sus residuos.

8. * Usando el teorema de los residuos evaluar:

$$(i) \oint_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$$

donde γ es el círculo $|z| = \sqrt{2}$ recorrido en sentido antihorario.

9. Mostrar que

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\lambda|}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

Ayuda: integrar a lo largo del rectángulo de vértices $z = \pm R$ y $z = \pm R + 2\pi i$

(c) Intentar evaluar por métodos tradicionales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

comparar con el cálculo por residuos.

Ecuaciones diferenciales

10. * i. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $\frac{dv}{dt} = -g$, (b) $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, (c) $L\frac{dI}{dt} + RI = \epsilon(t)$, (d) $y' = \tan y$, (e) $yy' = 1$, (f) $y'^2 = xy$

* ii. Indicar cuáles son lineales, y cuáles tienen fuentes.

* iii. Interpretar físicamente las ecuaciones (a), (b) y (c).

11. * **Caída no tan libre:** Considerar un cuerpo de masa m que cae bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. Tener en cuenta el efecto de la resistencia del aire modelando la fuerza de rozamiento con el aire como proporcional a la velocidad del cuerpo v . Llamando b al factor de proporcionalidad con la velocidad y considerando la aceleración debida a la gravedad como constante, g :

(i) * Plantear la ecuación de movimiento en términos de la velocidad $v(t)$ y resolverla considerando que la partícula parte del reposo

(ii) * Hallar $v(t)$ para tiempos largos, a.k.a. velocidad límite.

12. Ecuaciones diferenciales y series de potencias: resolver la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dN}{dt} = -kN^2$$

(a) Mediante integración directa, a.k.a. cuadraturas.

(b) Proponiendo una serie de potencias en t :

$$N(t) = n_0 + n_1t + n_2t^2 + \dots$$

Hallar los valores de n_i imponiendo que $N(t)$ sea solución de la ecuación diferencial.

Considerar el caso $k < 0$ (i.e. $\frac{dN}{dt} = \alpha N^2$ con $\alpha > 0$) y mostrar que la solución $N(t)$ diverge en un tiempo finito (comportamiento explosivo). Analizar el comportamiento de los coeficientes de la serie de potencias y evaluar su radio de convergencia.

13. ***Ecuaciones diferenciales lineales:** hallar las soluciones generales de:

(i) $y'' + 2y' + y = 0$, (ii) $y^{(4)} - y = 0$, (iii) $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$

14. **Variación de parámetros. Solución particular:** existe un método general para resolver el problema de la solución particular de una ecuación diferencial lineal con fuentes,

$$ay''(x) + by'(x) + cy = f(x) \rightsquigarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (1)$$

Receta¹:

a. Resolver la solución del sistema homogéneo: $y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, donde $y_{1,2}$ son L.I.

b. La solución particular se encuentra proponiendo las constantes de integración C_i pasen a depender de x , $C_i \rightarrow u_i(x)$, luego

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$$

De manera que tenemos dos incógnitas a determinar $\mathbf{u} = (u_1(x), u_2(x)) \rightsquigarrow$ necesitamos 2 ecuaciones.

c. Insertando la propuesta en (1) obtendremos una ecuación, a efectos de tener una segunda ecuación debemos imponer una condición sobre \mathbf{u} . Puesto que al derivar y_p obtenemos $y'_p = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}'$, una condición que podemos imponer es $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{y} = 0$. Tenemos entonces que la ecuación diferencial se reduce a

$$a(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{y}' + \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}'') + b\mathbf{u} \cdot \mathbf{y}' + c\mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = f \rightarrow \mathbf{u} \cdot \underbrace{(ay'' + by' + cy)}_{=0} + a\mathbf{u}' \cdot \mathbf{y}' = f \rightarrow \mathbf{y}' \cdot \mathbf{u}' = \frac{1}{a}f$$

El sistema de ecuaciones para \mathbf{u} resulta entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}' &= 0 \\ \mathbf{y}' \cdot \mathbf{u}' &= \frac{1}{a}f(x) \end{aligned} \rightsquigarrow W\mathbf{u}' = \mathbf{f} \rightsquigarrow \mathbf{u}' = W^{-1}\mathbf{f} \quad (2)$$

¹Propuesta por Bernouilli para ecuaciones de 1er orden y luego por Lagrange para ecuaciones de 2do orden.

donde

$$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}f \end{pmatrix}$$

La solución de (2) se obtiene inmediatamente por cuadraturas

$$\mathbf{u}(x) = \int^x dx' W^{-1}(x') \mathbf{f}(x') \quad (3)$$

La matriz W se denomina Wrosnkiano del sistema y resulta ser no singular.

15. **Campo Magnético constante:** Considerar el movimiento de una partícula cargada en el plano xy bajo la acción de un campo magnético \mathbf{B} transverso al plano. A partir de la fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ resolver el movimiento de la partícula expresando la ley de Newton $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ en forma matricial como

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v} \quad \implies \quad \mathbf{v}(t) = e^{At}\mathbf{v}_0$$

Hallar e^{At} diagonalizando A .