

Práctica IV: Algebra lineal

LOS EJERCICIOS MARCADOS CON * OBLIGATORIOS

Notación:

- . \mathbf{e}_i son los vectores canónicos: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$,...
- El índice i que indexa los distintos vectores de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ va abajo \downarrow .
- . $[\mathbf{v}]_B = \{v_{(b)}^i\}$ denota las componentes del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en la base $B = \{\mathbf{b}_i\}$.
- Las distintas componentes de un vector v^i en una dada base se denotan con un índice i arriba \uparrow .
- . Adoptamos la convención de Einstein: omitimos el símbolo de sumatoria para índices repetidos

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d v_{(e)}^i \mathbf{e}_i \quad \rightsquigarrow \text{se denota como } \rightsquigarrow \quad \mathbf{v} = \underbrace{v_{(e)}^i}_{\text{índices repetidos se suman}} \mathbf{e}_i$$

aquí $d = \dim(V)$ es la dimensión del espacio V .

1. * Definición de Espacio vectorial: un espacio vectorial sobre un cuerpo K consiste en un conjunto V y dos operaciones $\oplus : V \times V \rightarrow V$ y $\odot : K \times V \rightarrow V$ que satisfacen los siguientes axiomas:

- a) Asociatividad de la suma: $(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c} = \mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}), \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$
- b) Propiedad distributividad de \odot respecto de \oplus : $\lambda \odot (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) = (\lambda \odot \mathbf{a}) \oplus (\lambda \odot \mathbf{b}), \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \forall \lambda \in K$
- c) Compatibilidad de \odot con $+$: $(\lambda + \mu) \odot \mathbf{a} = (\lambda \odot \mathbf{a}) \oplus (\mu \odot \mathbf{a}), \forall \mathbf{a} \in V, \forall \lambda, \mu \in K,$
- d) Compatibilidad de \odot con \times : $(\lambda \times \mu) \odot \mathbf{a} = \lambda \odot (\mu \odot \mathbf{a}), \forall \mathbf{a} \in V, \forall \lambda, \mu \in K$
- e) Identidad aditiva: $\mathbf{0} := 0 \odot \mathbf{a} = 0 \odot \mathbf{b}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$
- f) $1 \in K$ es una identidad a izquierda de \odot : $1 \odot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in V.$

Mostrar: (i) si $\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{0}} = \mathbf{x}$, entonces $\tilde{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$, (ii) Existencia de inverso aditivo: $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} / \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ que denotamos como $-\mathbf{x}$, (iii) $(-1) \odot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$

2. * Dados $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$:

- (i) Analizar si son linealmente independientes
- (ii) Normalizarlos
- (iii) Verificar que son generadores de \mathbb{R}^2 hallando $[\mathbf{x}]_B = x_{(b)}^i$.

3. * Dado el conjunto de vectores $B' = \{\mathbf{v}_i\} = \{(1, 0, -1), (-1, 2, 1), (2, -1, 3)\}$:

- (a) Demostrar que B' es base de \mathbb{R}^3 .
- (b) Hallar las componentes $[\mathbf{w}]_{B'} = w_{(v)}^i$ del vector $\mathbf{w} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ en la base B'
- (c) Hallar las componentes $\tilde{w}_{(v)}^i$ cuando $\tilde{\mathbf{w}} = (2, -5, -1)$.

4. * Determinar si el conjunto de matrices antisimétricas 3×3 es un espacio vectorial. De serlo hallar una base.

5. Sean $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{w} = w^i \mathbf{e}_i$ ¹. Mostrar que si el conjunto $E = \{\mathbf{e}_i\}$ es linealmente independiente, luego

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \implies v^i = w^i \quad \forall i$$

Construir un contraejemplo donde $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ pero $v^i \neq w^i$ cuando $E' = \{\mathbf{e}'_i\}$ un conjunto linealmente dependiente.

¹Mas arriba introdujimos la notación $v_{(e)}^i = [\mathbf{v}]_E$ para las componentes del vector \mathbf{v} en la base $E = \{\mathbf{e}_i\}$, van a encontrar que muchos textos omiten el subíndice (e) .

6. Siendo $[\mathbf{v}]_E = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ las componentes de \mathbf{v} en la base canónica $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
- (a) Expresar \mathbf{v} en términos de la base $F = \{\mathbf{f}_i\}$ hallando $[\mathbf{v}]_F$ donde $\mathbf{f}_1 = (2, 1)$ y $\mathbf{f}_2 = (1, 2)$.
- (b) Hallar la matriz de cambio de base $S = C_{F \rightarrow E}$ definida como $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i S^i_j$.
Mostrar que $\det C_{F \rightarrow E} \neq 0$.
- (d) Hallar $S^{-1} = C_{E \rightarrow F}$ y verificar explícitamente que la relación entre las componentes de un vector \mathbf{v} en bases E y F es $[\mathbf{v}]_E = S[\mathbf{v}]_F$. Escribir esta relación en componentes y hallar

$$v_{(e)}^i = S^i_j v_{(f)}^j$$

- (e) Verificar que la notación de índices es correcta.
7. Reflexión en el plano: considerar la transformación lineal $F(\mathbf{v})$ en \mathbb{R}^2 que refleja el vector \mathbf{v} respecto de la recta $y = x$.
- (o) Verificar que la misma queda definida mediante

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \quad F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$$

- (a) Hallar las componentes de matriz de F en la base canónica $[F]_E$.
- (b) Hallar las componentes del vector transformado $\mathbf{v}' = F(\mathbf{v})$ en la base canónica.
- (c) Determinar los autovectores y autovalores de F
8. * Sea V el conjunto de polinomios de grado $\leq n$: $V = \{p(t) : p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, a_i \in \mathbb{R}\}$.
- Mostrar que V es un espacio vectorial y determinar su dimensión.
9. Polinomios de Legendre: considerar el espacio de funciones en el intervalo $x \in (-1, 1)$. Considerar el producto escalar dado por $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f^*(x)g(x)dx$. Construir un conjunto de polinomios ortogonales a partir del conjunto $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y normalizarlos de manera que $\langle P_n|P_m \rangle = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$ obteniendo

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$