

Práctica III: Geometría diferencial de curvas en el espacio.

LOS EJERCICIOS MARCADOS CON \* SON OBLIGATORIOS

- \* (i) Sea  $\mathbf{A} = (\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x, 0)$ , mostrar que  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$  y hallar  $\phi$  tal que  $\mathbf{A} = \nabla\phi$ . Es único  $\phi$ ?  
Graficar  $\mathbf{A}$  y las curvas de nivel de  $\phi$  en el plano  $xy$ . Cuál es la relación?  
(ii) El campo vectorial  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$  en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas toma la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{B_0}{2}y\mathbf{e}_x + \frac{B_0}{2}x\mathbf{e}_y = \frac{B_0}{2}\rho\mathbf{e}_\phi = \frac{B_0}{2}r\sin\theta\mathbf{e}_\phi$$

Hallar  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  en los tres sistemas de coordenadas y verificar que los resultados coinciden y resultan  $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{k}}$ .

- \* Verificar que el vector

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y), e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y), 0)$$

es irrotacional y expresarlo como el gradiente de un campo escalar  $\phi$ . Chequear que además puede ser expresado, alternativamente, como el rotor de un campo  $\mathbf{v} = (0, 0, \psi)$ , para una elección de  $\psi$  apropiada.

- \* Verificar el teorema de Stokes para la cáscara semiesférica  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$  y el campo vectorial

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (y, -x, z)$$

- Siendo  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x^3 + 3y + z^2, y^3, x^2 + y^2 + 3z^2)$  y  $S$  la superficie abierta

$$1 - z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1$$

Usar el teorema de Gauss y coordenadas cilíndricas para evaluar  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ . Verificar el resultado calculando la integral de superficie directamente.

Ayuda: deberías hallar  $d\mathbf{S} = (2\rho \cos \phi, 2\rho \sin \phi, 1)\rho d\rho d\phi$

- \* Evaluar las siguientes integrales de línea

$$\int (xdx + ydy + zdz), \quad \int (ydx + xdy + dz), \quad \int (ydx - xdy + e^{x+y}dz),$$

a lo largo de: (i) la recta que une el origen con el punto  $(1, 1, 1)$  y (ii) el arco parabólico dado por  $\mathbf{r}(t) = (t, t, t^2)$  desde  $t = 0$  a  $t = 1$ .

Para cuáles de las integrales obtenemos el mismo resultado para ambos caminos? Por qué?

- Describir paramétricamente un círculo de radio 3 centrado en  $(2, 0)$  y hallar  $r(\theta) = \sqrt{13 + 12\cos\theta}$ . Hallar los vectores velocidad y aceleración. En qué dirección se encuentran orientados?

- \* (i) Dada la curva  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (3t, t^2 + 4)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Eliminar  $t$  y reexpresarla como  $\mathbf{r}(x) = (x, y(x))$ . Graficarla y describir la forma de la curva.

\* (ii) Considerar  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^2, 3t^2 + 4)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Eliminar  $t$  y reexpresarla como  $\mathbf{r}(x) = (x, y(x))$ . Graficarla y describir la forma de la curva. Compara con (i)

\* (iii) Considerar las siguientes curvas  $\mathbf{r}_1(t) = (t, \frac{t^2}{9} + 4)$ ,  $\mathbf{r}_2(t) = (3t, t^2 + 4)$ ,  $\mathbf{r}_3(t) = (-3t, t^2 + 4)$ . Eliminar  $t$ , graficarlas y mostrar que describen la misma curva en el plano. Calcular el vector tangente  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  para cada una de las curvas en el punto  $\mathbf{r} = (3, 5)$  del plano. Coinciden?

(iv) Considerar la curva  $\rho(\theta) = 4\cos\theta$  en coordenadas polares en el plano. Eliminar  $(\rho, \theta)$  en favor de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  y hallar qué curva describe.

(v) Graficar la curva  $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$ . Analizar el comportamiento en el origen.

Considerar  $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$  y mostrar que corresponde a la *cúbica nodal*  $y^2 = x^3 + x^2$ .

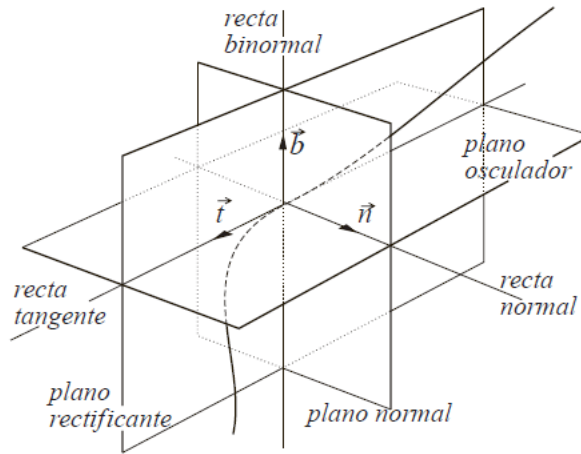
(v) Mostrar que la curva  $\mathbf{r}(t) = (\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{t(t^2-1)}{1+t^2})$  es una representación paramétrica de los puntos del plano que verifican,

$$(x^2 + y^2)(x - 2) + x = 0$$

Notar que la aplicación dada por  $\mathbf{r}(t)$  no es inyectiva:  $\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}(-1)$

8. Considerar la hélice descrita por  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ . Mostrar que la parametrización  $\mathbf{r}(s) = (a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c})$  donde  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  corresponde a parametrización afín. Hallar la curvatura y torsión y mostrar que son constantes. Considerar el caso  $b = 0$ , luego la curva se encuentra contenida en un plano. Cómo se manifiesta esto en términos de  $\tau(t)$ ?
9. Hacer un bosquejo de la curva en el plano  $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$  con  $t \in (0, 2\pi)$ . Calcular  $\mathbf{r}'(t)$  para todo punto de la curva y luego la longitud total de la misma. Indicar la dirección de los vectores  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$
10. \*Mostrar que si  $|\mathbf{r}(t)| = cte$  entonces  $\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$ . Esto es, si el módulo de un vector es constante (la partícula se mueve sobre un círculo/esfera centrado/a en el origen), el vector velocidad es ortogonal a la posición en todo punto de la trayectoria.
11. Mostrar que para el caso de curvas en el plano  $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$  la curvatura resulta

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}}$$



12. A partir de las definiciones  $\mathbf{t}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)/|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ ,  $\mathbf{n}(t) = \dot{\mathbf{t}}(t)/|\dot{\mathbf{t}}(t)|$  y  $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$  mostrar que

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)| \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}$$

13. Mostrar que la aceleración no tiene componentes en la dirección del vector binormal:

$$\mathbf{a}(t) \equiv \ddot{\mathbf{r}}(t) = a_N(t) \mathbf{n}(t) + a_T(t) \mathbf{t}(t).$$

donde

$$a_T(t) = v'(t) = \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)|, \quad a_N(t) = v^2(t) \kappa(t)$$

Alternativamente

$$a_T(t) = \mathbf{t}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}, \quad a_N(t) = |\mathbf{t}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)| = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}$$

14. A partir de las ecuaciones de Frenet-Serret hallar las expresiones para la curvatura y torsión

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot (\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dddot{\mathbf{r}}(t))}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|^2}$$

15. Mostrar que para una curva parametrizada afín  $\mathbf{r}(s)$  se tiene  $\mathbf{n}(s) = \ddot{\mathbf{r}}(s)/|\ddot{\mathbf{r}}(s)|$