

Práctica II: Desarrollo de Taylor. ∇. Convención de Einstein. Coordenadas curvilíneas.

LOS EJERCICIOS MARCADOS CON * SON OBLIGATORIOS

- (i) Hallar el desarrollo de Taylor de $\sin x$ centrado en $x_0 = \pi/4$.

(ii) Hallar el desarrollo de Taylor de $1/(1+x)$ en potencias de $(x-1)$ a partir de la serie geométrica. Establecer el intervalo de convergencia de la serie obtenida

(iii) Hallar el desarrollo de Taylor de $\log(1+x)$ en potencias de $(x-1)$. Establecer el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

(iv) Hallar el desarrollo de Taylor de $\cosh x$ centrado en $x=0$ y establecer el intervalo de convergencia.

(v) Hallar el desarrollo de Taylor de e^{-1/x^2} centrado en el origen. Discutir el resultado.
- (i) Siendo h una función de una variable, a partir de primeros principios hallar la derivada de

$$I(x) = \int_a^x h(y) dy$$

siendo a una constante

- (ii) Siendo $f(x, y)$ una función de dos variables. De primeros principios calcular la derivada respecto de x de

$$J(x) = \int_a^x f(x, y) dy \rightsquigarrow J'(x) = f(x, x) + \int_a^x \partial_x f(x, y) dy$$

- (i) Hallar el volumen de un cono de altura h y radio a en coordenadas cilíndricas.
- Mostrar que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \epsilon_{ijk} c_i a_j b_k \rightsquigarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

- *Mostrar que si $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) y $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, entonces

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

- *Mostrar que para las componentes de un vector a_i ($i = 1, 2, 3$) vale

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{ij} a_j = a_i \quad \text{matricialmente } \mathbb{I} \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker

- Siendo $i, j, k, l, m = 1, 2, 3$ y \mathbf{n} un vector unitario $n_i n_i = 1$:

- (i) Mostrar que la simplificación del lado izquierdo de las siguientes expresiones resulta en el lado derecho:

$$\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}, \quad \delta_{ij} \delta_{ij} = 3, \quad \delta_{ij} n_i n_j = 1$$

- (ii) Mostrar las siguientes identidades:

$$\epsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0, \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}, \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{ikj} = -6, \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$\epsilon_{ijk} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = a_i b_j - b_i a_j, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

- (iii) Reexpresar cada una de las siguientes expresiones en forma vectorial o matricial o explicar si son incorrectas y no tienen sentido

$$x_i = a_i b_k c_k + d_i, \quad x_i = a_j b_i + c_k d_i e_k f_j, \quad u = \epsilon_{jkl} v_k w_l x_j$$

$$\epsilon_{ijk} x_j y_k \epsilon_{ilm} x_l y_m = \mu, \quad A_{ik} B_{kl} = T_{ik} \delta_{kl}, \quad x_k = A_{ki} B_{ji} y_j$$

- (iv) Dada $A_{ij} = \epsilon_{ijk} a_k$ mostrar que $\epsilon_{kij} A_{ij} = 2a_k$

8. Verificar la siguiente identidad: $\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_jV_k = 0$ y mostrar que es equivalente a $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$.
9. *(i) Mostrar que $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ y $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ siendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ el vector posición.
- (ii) Mostrar que si $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$ donde \mathbf{w} es un vector constante y \mathbf{r} es el vector posición, entonces

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$$

Considerar $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$ y graficar \mathbf{v} para distintas posiciones en el plano xy .

10. Siendo $\psi(\mathbf{r})$ y $\chi(\mathbf{r})$ campos escalares y $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ campos vectoriales, mostrar que
- *(i)

$$\nabla \times \nabla\psi = \mathbf{0}$$

*(ii)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

(iii)

$$\nabla \times (\psi\mathbf{v}) = \nabla\psi \times \mathbf{v} + \psi \nabla \times \mathbf{v}$$

(iv)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$$

y por lo tanto

$$\nabla \cdot (\nabla\psi \times \nabla\chi) = 0$$

(v)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

11. A partir de las ecuaciones

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

Mostrar que

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$