Física I CiBEx

Trabajo Práctico 6

Movimiento periódico − Oscilador armónico

1. Un cuerpo de masa m se encuentra en reposo en el origen de un sistema coordenado xyz. Considerar que sobre el cuerpo puede actuar alguna de las siguientes fuerzas (que varían con la posición): (i) $\vec{F} = -kx^2\,\check{\imath}$; (ii) $\vec{F} = kx\,\check{\imath}$; (iii) $\vec{F} = -kx^3\,\check{\imath}$; (iv) $\vec{F} = -kx\,\check{\imath}$; (v) $\vec{F} = -k\,\check{\imath}$, (vi) $\vec{F} = -k\,\mathrm{sen}\,(x/a)\,\check{\imath}$, donde k y a son constantes positivas (con las unidades adecuadas). Si se desplaza al cuerpo sobre el eje x, separándolo del origen de coordenadas, ¿cuáles de estas fuerzas darán lugar a un movimiento periódico? ¿En algún caso será éste un movimiento armónico simple? ¿En algún caso el cuerpo se moverá con aceleración constante?

2. Un cuerpo de 2 kg se suspende de un resorte que cuelga verticalmente, observando que el cuerpo queda en equilibrio cuando el resorte se ha estirado 4 cm. El resorte se coloca luego sobre una superficie horizontal sin roce, fijándose uno de sus extremos a una pared y el otro a un bloque de 5 kg. Se aparta al bloque 20 cm desde la posición de equilibrio, alejándolo de la pared, y en el instante $t = 0$ se lo suelta, de modo que comienza a oscilar describiendo un movimiento armónico simple (MAS).

   (a) Determinar la constante del resorte.

   (b) Hallar la frecuencia angular ω y el período T del movimiento oscilatorio del bloque.

   (c) Eligiendo convenientemente el origen de coordenadas, y el eje x en la recta sobre la que se mueve el cuerpo, escribir las expresiones $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$ que describen el movimiento y representarlas gráficamente.

   (d) Calcular la posición del cuerpo para $t = T/2$, $t = T/4$ y $t = T/8$. Interpretar los resultados obtenidos.

   (e) Calcular la aceleración del cuerpo en los puntos de máxima separación del punto de equilibrio.

   (f) Determinar cuánto tarda el cuerpo en pasar por primera vez por el punto de equilibrio, y calcular la aceleración y la velocidad del cuerpo en ese instante.

3. Una partícula se mueve con movimiento armónico simple con una amplitud $A = 8$ cm y una frecuencia de 0.25 oscilaciones por segundo.

   (a) Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula 0.5 segundos después de que ésta pasa por uno de los extremos de la trayectoria.

   (b) La partícula alcanza máxima velocidad en el instante en que pasa por la posición de equilibrio. (i) Calcular cuánto tiempo transcurre desde ese instante hasta que la velocidad se reduce a la mitad del valor máximo; comparar con el período. (ii) Determinar qué fracción de A recorre la partícula durante el lapso calculado en (i).

4. Para el sistema cuerpo-resorte del problema 2, calcular la energía potencial y cinética en función de t, determinando dónde se encuentra el cuerpo en los instantes en que éstas alcanzan su valor máximo. Hallar la energía mecánica del sistema oscilante, mostrando que es constante en el tiempo.

5. Un bloque de 3 kg unido a un resorte unidimensional de constante 2 kN/m oscila con una energía mecánica total de 0.9 J.

(a) Calcular la amplitud del movimiento y la velocidad máxima que alcanza el bloque.

(b) Graficar la energía potencial, la energía cinética y la energía mecánica del sistema en función de la posición del bloque.

6. Para cada una de las fuerzas propuestas en el problema 1, encontrar una posible expresión para la energía potencial del sistema (¿está ésta completamente determinada?). Graficar las correspondientes funciones $U(x)$, y vincular las curvas obtenidas con las respuestas a la primera pregunta planteada en el problema.

7. La energía potencial de un cuerpo que puede moverse sobre el eje x de un sistema coordenado viene dada por $U(x) = -a\,x\,e^{-x/x_0}$, siendo $a = 2$ J/m y $x_0 = 3$ cm.

   (a) Mostrar que el cuerpo se encuentra en equilibrio cuando $x = x_0$, y que el equilibrio es estable.

   (b) A través de un desarrollo de Taylor, determinar la forma de la energía potencial cuando x es próximo al punto de equilibrio (¿cómo podría determinarse si es "próximo" o no?).

   (c) Mostrar que para pequeñas oscilaciones alrededor de x_0 el cuerpo se moverá con un MAS, y determinar su frecuencia angular si la masa del cuerpo es de 3 kg.

   Nota: observar que puede realizarse un análisis similar para cualquier función $U(x)$ que tenga un mínimo relativo en algún punto x_0. De este modo, el modelo de oscilador armónico puede extenderse a muchos tipos de interacciones, permitiendo por ejemplo modelar las vibraciones de átomos en redes cristalinas.

8. Una plataforma horizontal vibra verticalmente con movimiento armónico simple de 3 cm de amplitud. Calcular la máxima frecuencia admisible para que un cuerpo apoyado sobre la plataforma no se separe de ésta durante el movimiento.

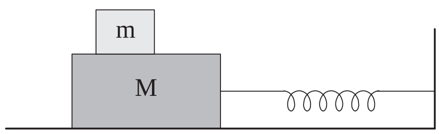
9. Un cuerpo de masa $m = 400$ g cuelga de un resorte sujeto a un techo. El sistema se encuentra en equilibrio, estando el resorte estirado 10 cm respecto de su longitud natural. Mostrar que si se desplaza al cuerpo una distancia a hacia abajo y se lo suelta, el movimiento posterior que llevará a cabo será armónico simple, y determinar su frecuencia.

   Sugerencia: elegir el origen del eje vertical en la posición de equilibrio del cuerpo, y determinar la fuerza resultante cuando éste se encuentra en una posición arbitraria $\vec{r} = y\,\check{\jmath}$.

10. Dos bloques de masas $m = 2$ kg y $M = 10$ kg y un resorte de constante $k = 200$ N/m oscilan sobre una superficie horizontal libre de rozamiento (ver figura). El coeficiente de rozamiento estático entre los dos bloques es $\mu_{\text{est}} = 0.4$.

    (a) Si los bloques no deslizan, y la máxima aceleración que alcanzan es $|\vec{a}| = 2$ m/s^2, determinar la amplitud de la oscilación.

    (b) ¿Cuál es la amplitud máxima de oscilación que podría tener el sistema de modo tal que no exista deslizamiento entre los bloques?



Algunos resultados: 1) (iii), (iv) y (vi) conducen a movimientos periódicos, (iv) a un MAS, (v) a un movimiento con $\vec{a} =$ constante; 2a) $k = 490$ N/m; 2b) $\omega = 9.90$ rad/s, $T = 0.635$ s; 2d) $x = -20$ cm, $x = 0$, $x = 14.1$ cm (dependen de la elección del eje coordenado); 2e) $|\vec{a}| = 19.6$ m/s^2; 2f) $t = 0.159$ s, $|\vec{a}| = 0$, $|\vec{v}| = 1.98$ m/s; 3a) $|\vec{v}| = 8.89$ cm/s, $|\vec{a}| = 14.0$ cm/s^2; 3b) $t = T/6$, $d/A = \sqrt{3}/2 \simeq 0.866$; 4) $E_{\text{mec}} = 9.8$ J; 5a) $A = 3$ cm, $|\vec{v}|_{\text{máx}} = 77.5$ cm/s; 7c) $\omega = 2.86$ rad/s; 8) $f_{\max} = 2.88$ Hz; 9) $f = 1.58$ Hz; 10a) $A = 12$ cm; 10b) $A_{\text{máx}} = 23.5$ cm.