Física I CiBEx

Trabajo Práctico 1

Vectores − Vector posición − Vector desplazamiento

Dado un sistema cartesiano de ejes coordenados xyz, podemos denotar a un vector $\vec{v}$ como una terna ordenada de números reales, v_x, v_y, v_z:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)\ .$$

Los números v_x, v_y y v_z se denominan *componentes* del vector $\vec{v}$ en las direcciones de los ejes coordenados x, y y z respectivamente. El *módulo* del vector es un número real positivo o cero, definido por $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ (evidentemente, $|\vec{v}| = 0$ sólo si las tres componentes son nulas). Gráficamente el vector $\vec{v}$ puede representarse como un segmento orientado en el espacio (o una "flecha"), que va desde un punto inicial o *punto de aplicación* a un punto final. El módulo del vector es la longitud de este segmento, y las componentes son las proyecciones en las direcciones de los ejes coordenados.

1. Calcular el módulo de un vector $\vec{A}$ de componentes $A_x = 1$, $A_y = 2$ y $A_z = -1$.

2. ¿Tiene sentido afirmar que un vector es positivo (o negativo)? ¿Y que la componente y de un vector es positiva (o negativa)?

3. (a) Calcular el módulo de un vector $\vec{A}$ en el plano xy cuyas componentes son $A_x = 2$ y $A_y = -4$. Determinar el ángulo que forma este vector con el eje x. Representar al vector en el plano.
   Nota: los ángulos se miden con respecto a los semiejes positivos.

   (b) ¿Es única esta representación? ¿Cómo se eligió el punto de aplicación del vector para representarlo?

4. Determinar las componentes de un vector $\vec{A}$ en el plano xy que tiene módulo 2 y forma un ángulo de 30° con el eje x. Ídem para un vector $\vec{B}$ de módulo 3 que forma un ángulo de 90° con el eje x.

Muchas magnitudes físicas, como posición, velocidad, aceleración, fuerza, momento angular, etc., son *vectoriales*, es decir, se representan matemáticamente mediante vectores (acompañados de las unidades de magnitud correspondientes). Otras como masa, densidad, carga eléctrica, temperatura, etc., se dice que son *escalares*, y se representan por números reales (con la unidad de magnitud que corresponda). Para este curso se requerirá conocer algunas operaciones que involucran vectores:

- La *suma* de un vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y otro vector $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ da como resultado un tercer vector $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, donde $u_x = v_x + w_x$, $u_y = v_y + w_y$, y $u_z = v_z + w_z$. Gráficamente, el vector resultante $\vec{u}$ puede obtenerse ubicando al vector $\vec{w}$ "a continuación" de $\vec{v}$ (esto es, haciendo coincidir el punto de aplicación de $\vec{w}$ con el punto final de $\vec{v}$). El vector $\vec{u}$ vendrá dado entonces por el segmento orientado que va desde el punto de aplicación de $\vec{v}$ hasta el punto final de $\vec{w}$.

  Es fácil comprobar que la suma de vectores es *conmutativa*.

5. (a) Calcular las componentes del vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, siendo $\vec{A}$ y $\vec{B}$ los vectores definidos en el ejercicio 4. Verificar la validez del método gráfico para este ejemplo.

   (b) Ídem ejercicio anterior pero considerando, en lugar de $\vec{B}$, un vector $\vec{B}\,'$ que verifica $|\vec{B}\,'| = |\vec{A}|$ y forma un ángulo de $-30°$ con el eje x.

- El *producto* de un vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ *por un escalar* (número real) a da como resultado un vector $\vec{w} = a\vec{v}$ cuyas componentes son $w_x = a\,v_x$, $w_y = a\,v_y$ y $w_z = a\,v_z$. De acuerdo con esta definición, se puede probar que el módulo de $\vec{w}$ es $|\vec{w}| = |a||\vec{v}|$, la dirección de $\vec{w}$ es la misma que la de $\vec{v}$, y su sentido es igual al de $\vec{v}$ si $a > 0$ y es opuesto al de $\vec{v}$ si $a < 0$. Es decir que esta operación permite modificar el módulo, y eventualmente el sentido, pero no la dirección del vector. Notar que el producto $|a||\vec{v}|$ es un producto entre dos números reales positivos (o cero): $|a|$ es el *valor absoluto* de a, mientras que $|\vec{v}|$ es el *módulo* de $\vec{v}$.

6. Siendo $\vec{A}$ y $\vec{B}$ los vectores definidos en el ejercicio 4, calcular y representar gráficamente los vectores $\vec{C} = 3\,\vec{A}$, $\vec{D} = -2\,\vec{B}$, $\vec{E} = \vec{A}/2 + \vec{B}$, $\vec{F} = 2/3\,\vec{B} - \vec{A}$.

Habitualmente es conveniente escribir a un vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ utilizando los *versores* $\check{\imath}$, $\check{\jmath}$ y $\check{k}$, que son vectores de módulo 1 (o *unitarios*) cuyas direcciones son las de los ejes coordenados x, y y z respectivamente. Es decir, $\check{\imath} = (1,0,0)$, $\check{\jmath} = (0,1,0)$ y $\check{k} = (0,0,1)$. Puede mostrarse que el vector $\vec{v}$ viene dado por la suma $\vec{v} = v_x\check{\imath} + v_y\check{\jmath} + v_z\check{k}$.

7. (a) Escribir los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{B}\,'$ definidos en los ejercicios 4 y 5 utilizando versores. Interpretar gráficamente.

   (b) ¿Tiene sentido afirmar que un versor es positivo (o negativo)?

Vector posición: dado un sistema de ejes coordenados, se define como *vector posición* de una partícula ubicada en un punto de coordenadas x, y, z al vector que tiene punto de aplicación en el origen de coordenadas y punto final en el punto donde se encuentra la partícula. De este modo, si denotamos a este vector como $\vec{r}$, se tiene $\vec{r} = (x, y, z) = x\,\check{\imath} + y\,\check{\jmath} + z\,\check{k}$.

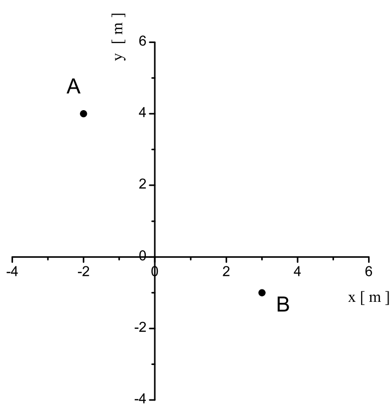
Vector desplazamiento: sea $\vec{r}$ la posición de una partícula en un dado instante inicial, y $\vec{r}\,'$ la posición de la misma en algún instante posterior ("instante final"), se define como *vector desplazamiento* de la partícula al vector $\vec{D} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ (es decir, desplazamiento = posición final − posición inicial). Una notación usual es también $\vec{D} = \Delta\vec{r}$.

8. A partir de la definición anterior, mostrar gráficamente que si una partícula se desplaza desde un punto A hasta un punto B, el vector cuyo punto de aplicación es A y su punto final es B es justamente el vector desplazamiento $\vec{D}$. ¿Cómo se define la *distancia entre ambos puntos*, y qué relación tiene con el vector $\vec{D}$?

   Ayuda: Notar que $\vec{D} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ es equivalente a $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{D}$.

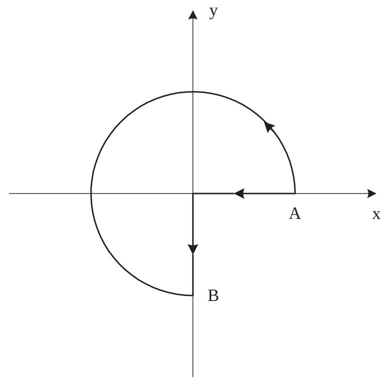
9. En un tiempo t, un cuerpo se desplaza desde el punto A hasta el punto B representados en la figura.

   (a) Para el sistema de ejes coordenados de la figura, representar gráficamente los vectores posición inicial y final (que podrían denotarse $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$) y escribirlos usando versores.
   (b) Calcular el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y representarlo gráficamente. Determinar los ángulos que forma $\Delta\vec{r}$ con los ejes coordenados.
   (c) Ídem (a) y (b) para un sistema de ejes coordenados paralelo al de la figura pero cuyo origen es el punto A.
   (d) ¿Qué nos dicen los resultados anteriores sobre la *trayectoria* seguida por el cuerpo entre el instante inicial y final? ¿Y sobre la distancia entre las posiciones inicial y final?



10. La distancia entre La Plata y Mar del Plata es de 342 km, mientras que la "distancia en ruta" entre ambas ciudades es de 365 km. Definir un sistema de ejes coordenados y determinar en ese sistema el vector desplazamiento para un automóvil que se encuentra en el instante inicial en La Plata y en el instante final en Mar del Plata. Discutir cuántas son las *cifras significativas* en el resultado obtenido.

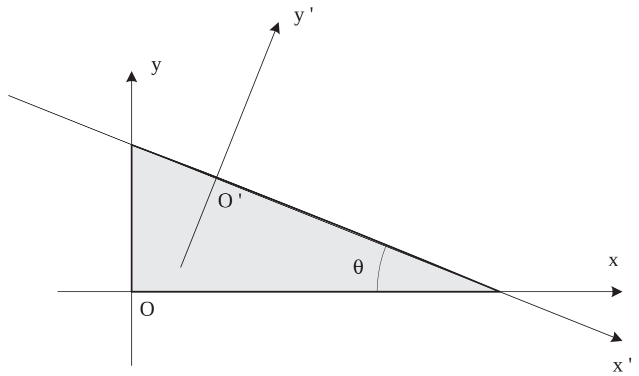
11. Un hombre se desplaza desde un punto A hasta otro punto B siguiendo un arco de circunferencia. Una mujer se mueve también desde el punto A hasta el punto B, pero siguiendo dos caminos rectilíneos (ver figura). Si las coordenadas de los puntos A y B en el sistema de ejes representado son (5 m, 0) y (0, −5 m), respectivamente, calcular para cada persona la longitud de la trayectoria recorrida y el vector desplazamiento.



12. La figura muestra un plano inclinado que forma un ángulo $\theta = 30°$ con la horizontal.

    (a) Sean $\check{\imath}$ y $\check{\jmath}$ versores en las direcciones de los ejes x e y. Representar gráficamente el vector $\vec{A} = 3$ m $\check{\jmath}$, y hallar sus componentes en el sistema de ejes coordenados $x'y'$.

    (b) Un cuerpo desciende sobre el plano inclinado, recorriendo una distancia de 4 m. Escribir el vector desplazamiento en los sistemas de ejes coordenados xy y $x'y'$, utilizando los versores correspondientes.



- Otras operaciones que involucran vectores son el *producto escalar* y el *producto vectorial.* Nos ocuparemos de ellas más adelante.

Algunos resultados: 1) $|\vec{A}| = \sqrt{6}$; 3a) $|\vec{A}| = \sqrt{20}$, $\theta = -63.4°$ (ó 296.6°); 4) $A_x = 1.73$, $A_y = 1$, $B_x = 0$, $B_y = 3$; 5a) $C_x = 1.73$, $C_y = 4$; 5b) $C'_x = 3.46$, $C'_y = 0$; 6) $\vec{C} = (5.20, 3)$, $\vec{D} = (0, -6)$, $\vec{E} = (0.87, 3.5)$, $\vec{F} = (-1.73, 1)$; 7a) $\vec{A} = 1.73\,\check{\imath} + \check{\jmath}$, $\vec{B} = 3\,\check{\jmath}$, $\vec{B}\,' = 1.73\,\check{\imath} - \check{\jmath}$; 9a) $\vec{r}_A = -2$ m $\check{\imath} + 4$ m $\check{\jmath}$, $\vec{r}_B = 3$ m $\check{\imath} - 1$ m $\check{\jmath}$; 9b) $\Delta\vec{r} = 5$ m $\check{\imath} - 5$ m $\check{\jmath}$, $\theta_x = -45°$; 9c) $\vec{r}_A\,' = 0$, $\vec{r}_B\,' = 5$ m $\check{\imath} - 5$ m $\check{\jmath}$, $\Delta\vec{r}\,' = 5$ m $\check{\imath} - 5$ m $\check{\jmath}$; 11) $\ell_H = 23.6$ m, $\ell_M = 10$ m, $\Delta\vec{r}_H = \Delta\vec{r}_M = -5$ m $\check{\imath} - 5$ m $\check{\jmath}$; 12) $\vec{A} = -1.5$ m $\check{\imath}' + 2.60$ m $\check{\jmath}'$, $\Delta\vec{r} = 3.46$ m $\check{\imath} - 2$ m $\check{\jmath} = 4$ m $\check{\imath}'$.