# FÍSICA I – 2014

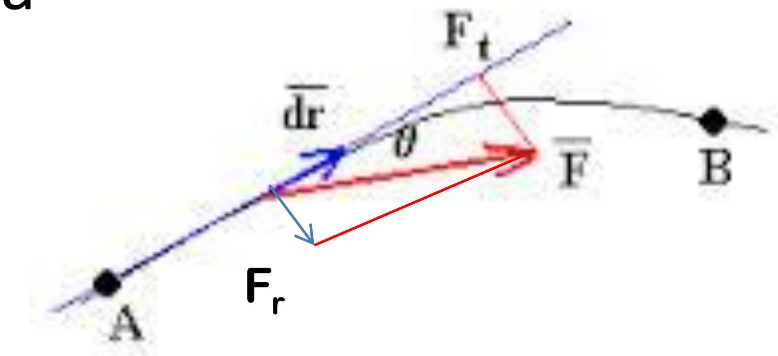
## CLASE 10

# Trabajo y Energía

¿Qué entendemos en Física por *trabajo*?


# *Trabajo y energía*

Una partícula de masa *m* que se mueve a lo largo de la trayectoria AB bajo la acción de la fuerza ***F:***




Descomponemos la fuerza en sus componentes según las direcciones tangencial y radial:

$$F_t = m\frac{dv}{dt}$$

Variación del módulo de la velocidad

$$F_r = m\frac{v^2}{r}$$

Variación de la dirección del vector velocidad, aceleración centrípeta

# Definición de trabajo

La partícula bajo la acción de la fuerza ***F*** sufre un desplazamiento ***Δr***, dando lugar a la variación de una cantidad, ***W***, a la que llamaremos trabajo:

$$\Delta W = F_s \Delta r; F_s = F\cos\phi$$

$$\Delta W = F\cos\phi\Delta r = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}$$

Si se trata de un desplazamiento infinitesimal, ***dr***, obtenemos un diferencial de trabajo que realiza la fuerza ***F***:

dW=**F**•d**r**

resultando el trabajo total:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$\vec{F} = F_x\breve{i} + F_y\breve{j} + F_z\breve{k}$$

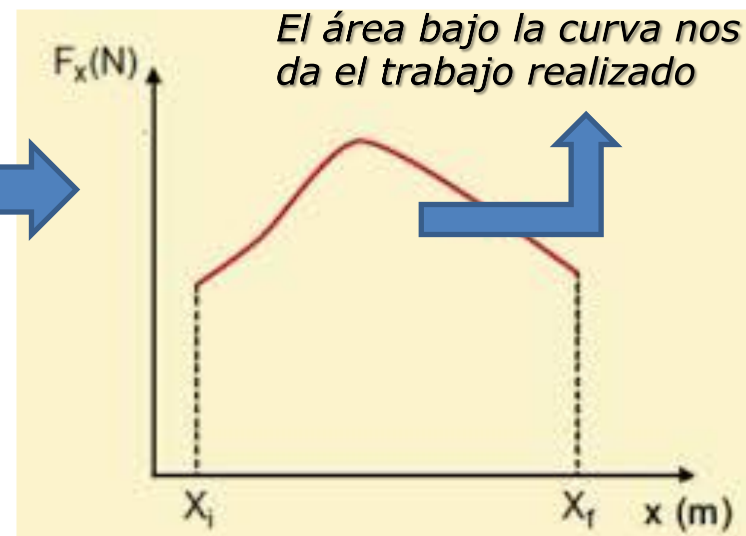
$$d\vec{r} = dx\breve{i} + dy\breve{j} + dz\breve{k}$$

En el caso de una dimensión podemos graficar:

$$W_{AB} = \int_A^B F_x dx$$

$$\vec{F} = F_x\breve{i}$$

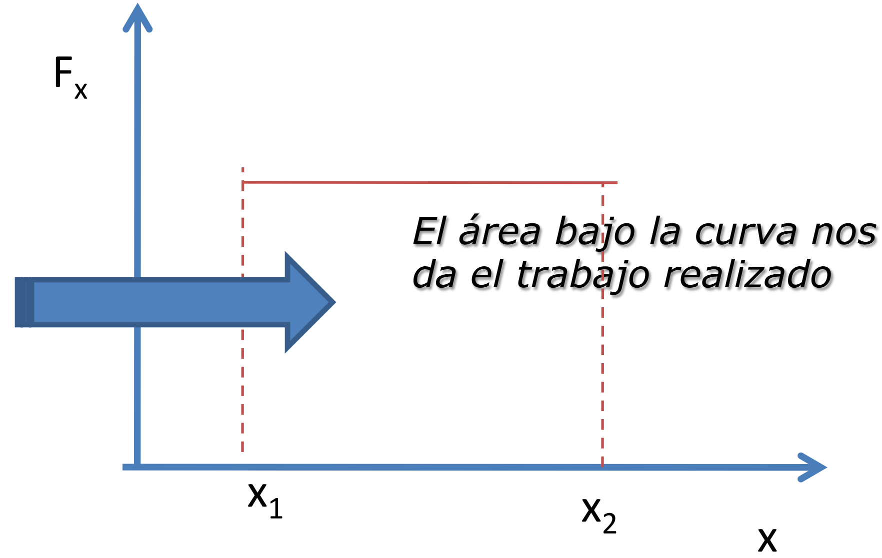
$$d\vec{r} = dx\breve{i}$$



# Definición de trabajo

Si la fuerza $F_x$ es constante:

$$W_{AB} = \int_{x_1}^{x} F_x dx = F_x \int_{x_1}^{x_2} dx = F_x (x_2 - x_1)$$




- El trabajo *W* es una magnitud *escalar.*
- Sus unidades son*: [W]=[F][l]=Nm=joule*
- Si más de una fuerza está aplicada a la partícula produciéndole un desplazamiento ***dr***:

$$W_{total} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_1 \bullet d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_2 \bullet d\vec{r} \ldots = \int_A^B \vec{F}_{neta} \bullet d\vec{r}$$

# Teorema del trabajo y la energía

$$W_{total} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_1 \bullet d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_2 \bullet d\vec{r} \ldots = \int_A^B \vec{F}_{neta} \bullet d\vec{r}$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

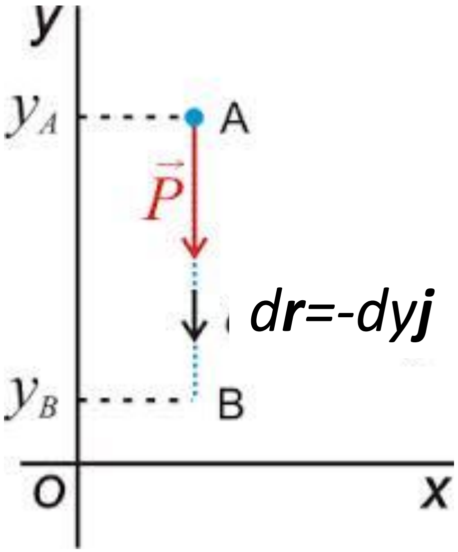
$$W_{total} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B F_s ds = \int_A^B m\frac{dv}{dt}ds = \int_A^B mdv\frac{ds}{dt}$$

$$W_{total} = m\int_A^B vdv = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \Delta E_c$$

- Donde $E_c = mv^2/2$ es la energía cinética de la partícula.
- Es una magnitud *escalar*
- Sus unidades son*: $[E_c]=[m][v]^2=kg(m/s)^2=joule$*

# *Fuerzas conservativas*

Calculemos el trabajo de la fuerza peso:



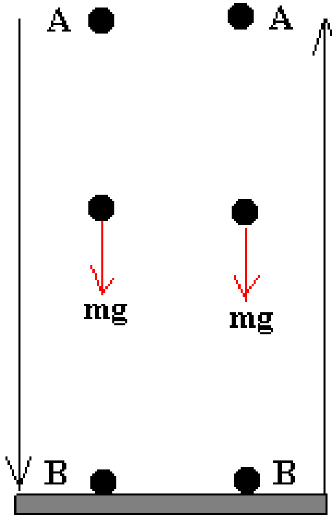

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$\vec{F} = -mg\breve{j}$$

$$d\vec{r} = -dy\breve{j}$$

$$W_{AB} = \int_A^B (-mg)(-dy) = mg\int_A^B dy =$$

$$W_{AB} = mg(y_B - y_A) = mgh$$




$$W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$\vec{F} = -mg\breve{j}$$

$$d\vec{r} = dy\breve{j}$$

$$W_{BA} = \int_B^A (-mg)(dy) = -mg\int_B^A dy =$$

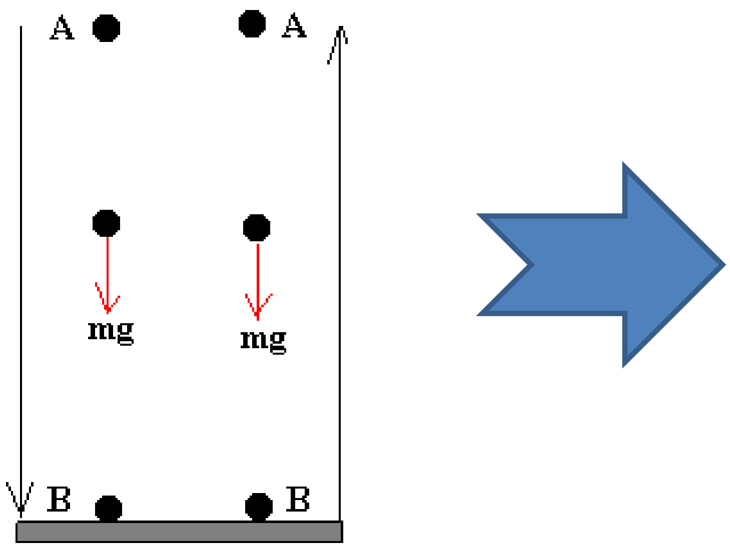
$$W_{BA} = -mg(y_B - y_A) = -mgh$$

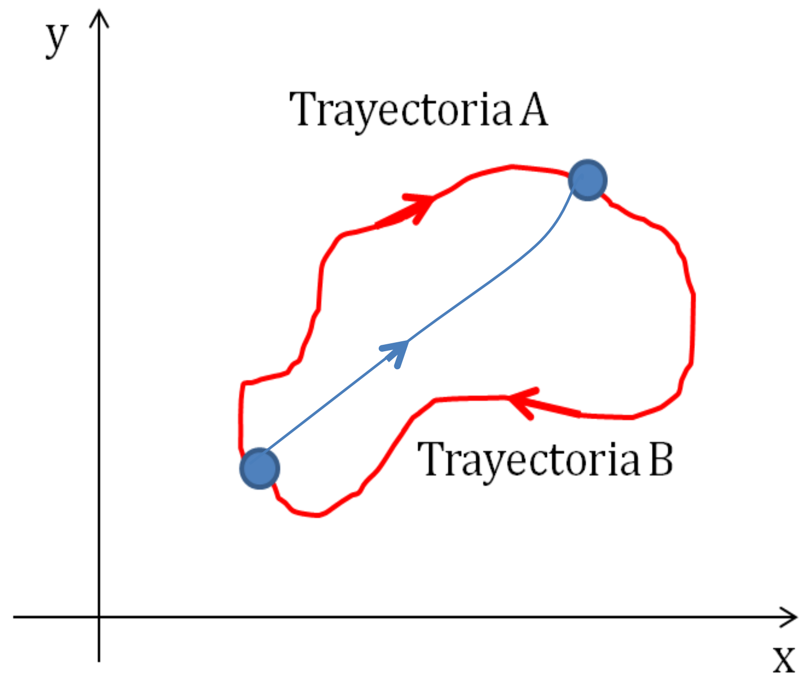
$$W_T = W_{AB} + W_{BA} =$$

$$W_T = mgh + (-mgh) = 0$$

# *Fuerzas conservativas*

- La fuerza de atracción gravitatoria (peso) presenta la característica que en un circuito cerrado el trabajo total es *nulo*.




- El trabajo realizado es independiente de la trayectoria, solo depende de los puntos inicial y final.

- Las fuerzas con estas propiedades se denominan *fuerzas conservativas* (electrostática, elástica).

# *Energía potencial*

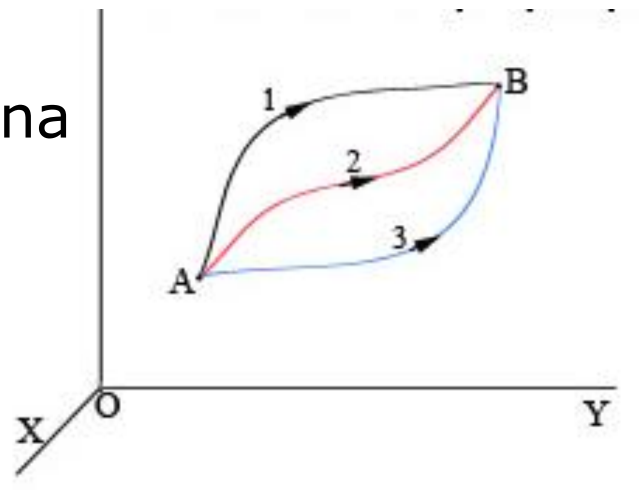
Recordemos que $W_T = \Delta E_C$ , luego si se pierde una cierta cantidad de energía en un sentido y en otro se recupera.

- La fuerza conservativa no puede depender del sentido del movimiento, ni de la velocidad del cuerpo.

- Como máximo puede depender de la posición.

Asociamos a la fuerza conservativa una *energía potencial, U,* que satisface

$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\Delta U$$



# *Energía potencial*

- Si *F* es una fuerza conservativa:

$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\Delta U$$

Para un desplazamiento infinitesimal:

$$\vec{F} \bullet d\vec{r} = -dU$$

Consideremos la fuerza de atracción gravitatoria (una dimensión):

$$\vec{F} = -mg\breve{j}$$

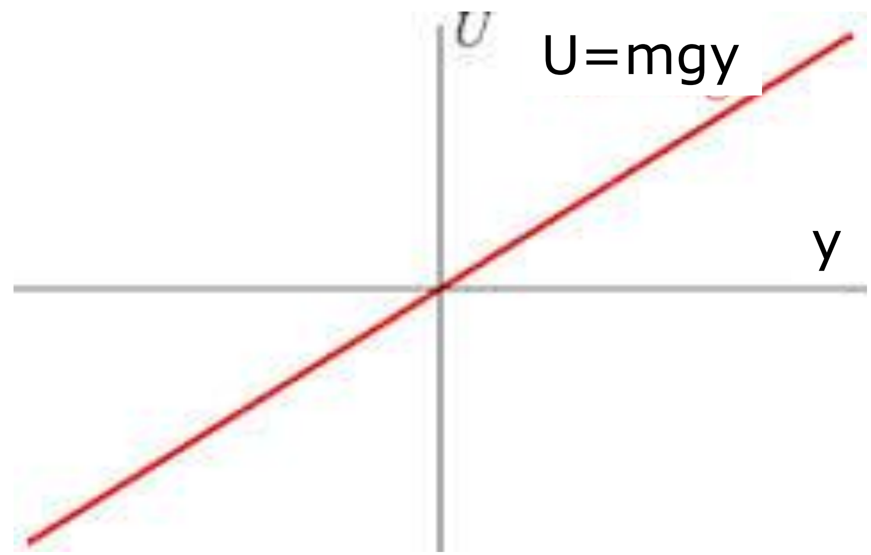
$$d\vec{r} = -dy\breve{j}$$

$$W_{AB} = \int_A^B (-mg)(-dy) = mg\int_A^B dy =$$

$$W_{AB} = mg(y_B - y_A) = mgh$$

$$mg(y_f - y_i) = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

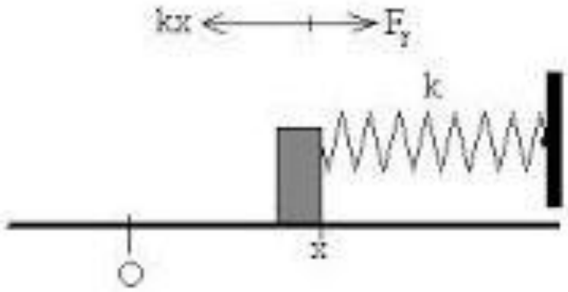
$$U_f = U_i + mgh$$

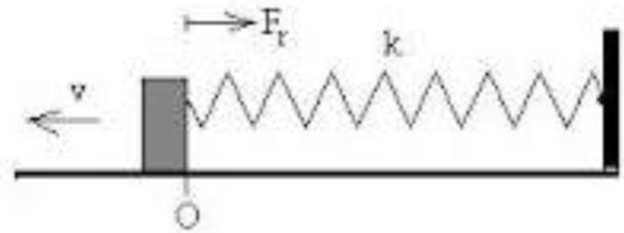



La elección del punto inicial es arbitrario: $U_i=0$

# *Energía potencial elástica*

Consideremos la fuerza elástica recuperadora de un resorte




$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$\vec{F} = -kx\breve{i}$$

$$d\vec{r} = dx\breve{i}$$

$$W = \int_0^x -kx\,dx = -\frac{kx^2}{2}$$

$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$\vec{F} = kx\breve{i}$$

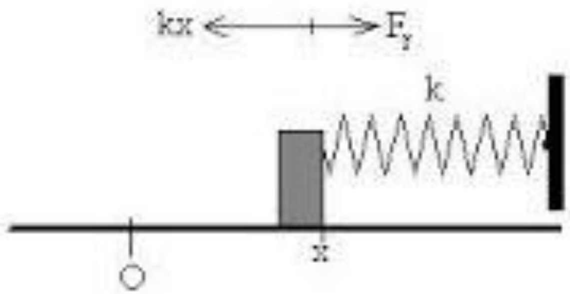
$$d\vec{r} = -dx\breve{i}$$

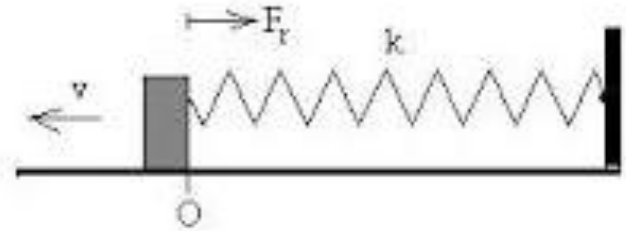
$$W = \int_x^0 -kx\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

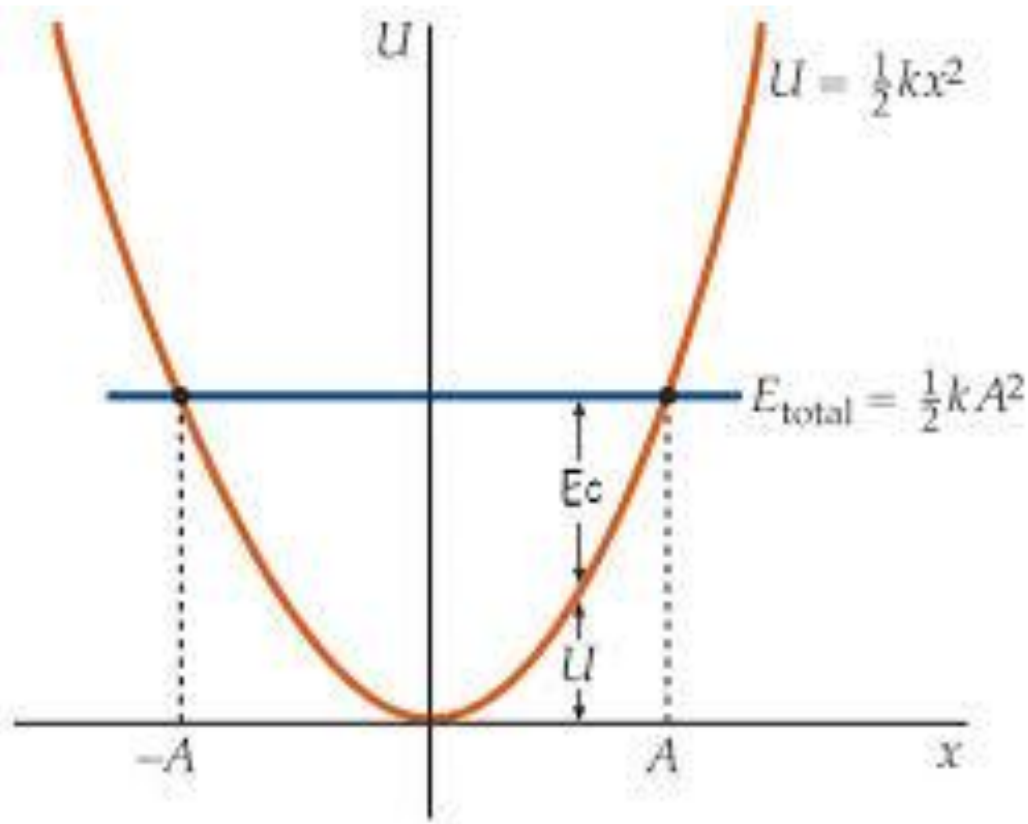
$$W_T = 0$$

La fuerza elástica del resorte es una ***fuerza conservativa*** → ***energía potencial asociada***

# *Energía potencial elástica*




$$-kxdx = -dU$$

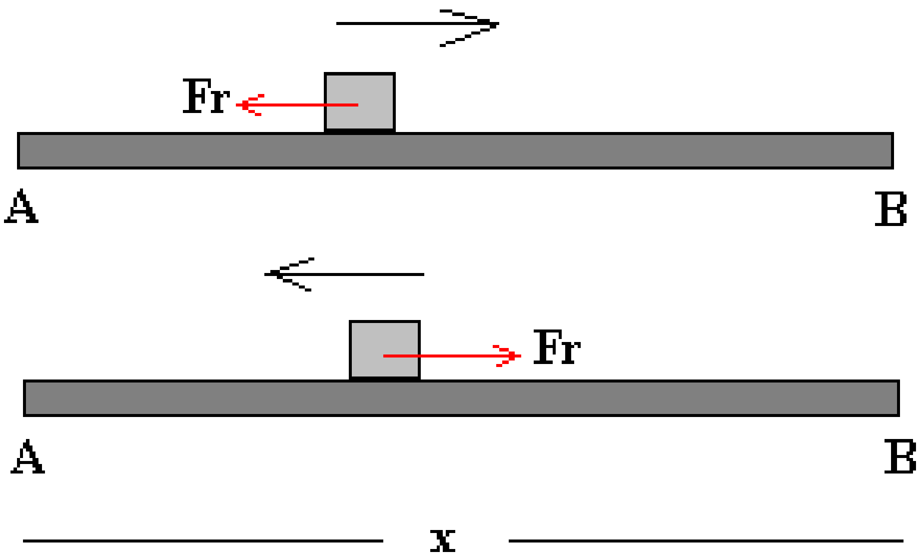
$$U = U_0 + \frac{kx^2}{2}$$

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

La elección del punto inicial es arbitrario: $U_o = 0$

# *Trabajo de la fuerza de roce*

La fuerza de roce, *¿es conservativa?*




$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$W_{AB} = \int_{A}^{B} -F_r\,dx$$

$$W_{BA} = \int_{B}^{A} -F_r\,dx$$

$$W_T \neq 0$$

El trabajo total en un circuito cerrado no es nulo $\Rightarrow$ la fuerza de roce *no es conservativa.*

# *Conservación de la energía*

- Si sobre una partícula actúan solo fuerzas conservativas:

$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$W_T = \Delta E_c = -\Delta U$$

Por el teorema del trabajo y la energía

Por ser fuerzas conservativas

$$\Delta E_c + \Delta U = 0$$

$$\Delta (E_c + U) = \Delta E_m = 0$$

$$E_m = cte$$

Teorema de *conservación de la energía*:

La *energía mecánica total* de un sistema permanece constante si las fuerzas que actúan sobre él son *conservativas.*

# *Teorema generalizado del trabajo y la energía*

Una partícula sufre un desplazamiento ***dr*** como consecuencia de la acción de varias fuerzas conservativas, $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$ y una fuerza no conservativa, $\boldsymbol{F_{nc}}$, el trabajo total realizado por todas estas fuerzas, será:

$$W_T = \int \vec{F}_{neta} \bullet d\vec{r} = \int \vec{F}_1 \bullet d\vec{r} + \int \vec{F}_2 \bullet d\vec{r} + \int \vec{F}_{nc} \bullet d\vec{r}$$

$$W_T = -\Delta U_1 + -\Delta U_2 + \int \vec{F}_{nc} \bullet d\vec{r}$$

Por ser fuerzas conservativas

Por el teorema del trabajo y la energía $\Rightarrow$ $W_T = \Delta E_c$

$$W_T = \Delta E_c = -\Delta U_1 - \Delta U_2 + W_{nc}$$

$$\Delta E_c + \Delta U_1 + \Delta U_2 = W_{nc}$$

$$\Delta(E_c + U_1 + U_2) = \Delta E_m = W_{nc}$$

Teorema *generalizado del trabajo y la energía:*

El *trabajo de las fuerzas no conservativas* es igual a la *variación de la energía mecánica.*