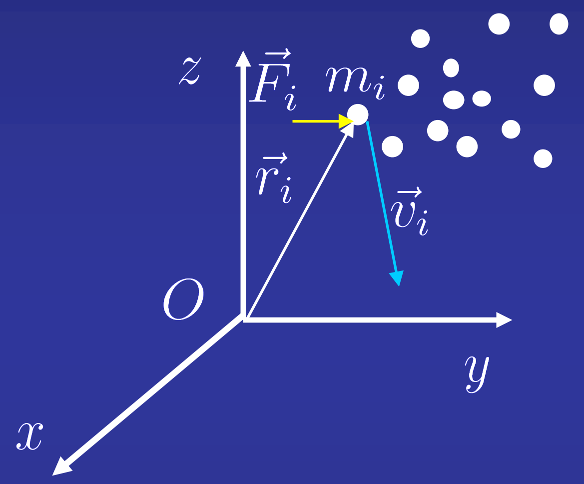
Dinámica de los sistemas de partículas



Javier Junquera

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

CITIMAC

Bibliografía

FUENTE PRINCIPAL

Física, Volumen 1, 3° edición

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Ed. Thomson

ISBN: 84-9732-168-5

Capítulo 8

Física para Ciencias e Ingeniería, Volumen 1, 7° edición

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Cengage Learning

ISBN 978-970-686-822-0

Capítulo 9

Tips on Physics

R. P. Feynman, R. B. Leighton, y M. Sands

Ed. Pearson Addison Wesley

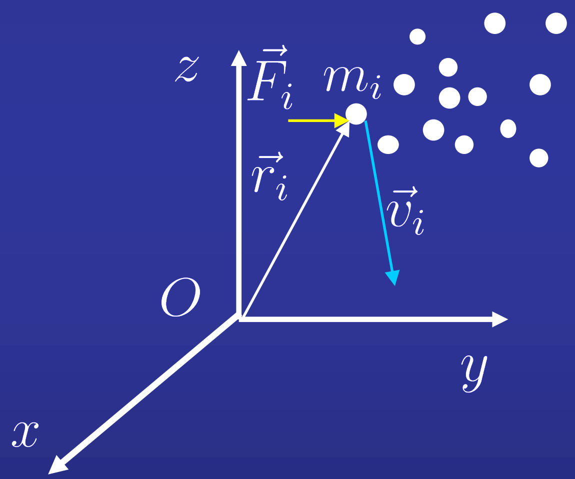
ISBN: 0-8053-9063-4

Capítulo 3-3 y siguientes

Definiciones básicas

Supongamos un sistema compuesto por n partículas.
Para cada una de ellas podemos definir

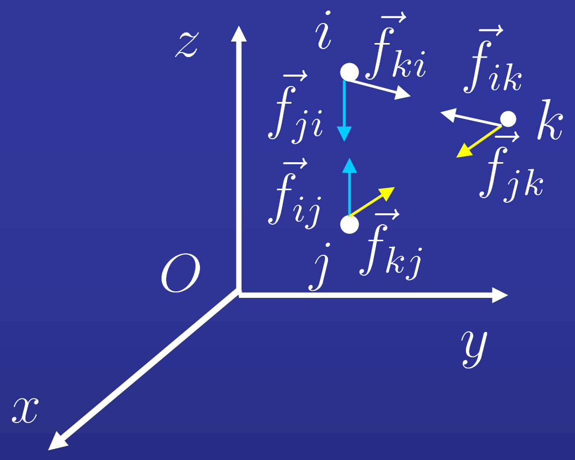
$$1 \leq i \leq n$$



Masa	m_i
Posición	$\vec{r}_i$
Velocidad	$\vec{v}_i$
Aceleración	$\vec{a}_i$
Fuerza externa	$\vec{F}_i$
Fuerza interna ejercida por j sobre i	$\vec{f}_{ji}$

Propiedades de las fuerzas interiores

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$



$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{ij} = 0$$

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} + \vec{r}_j \times (-\vec{f}_{ji}) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ji} = 0$$

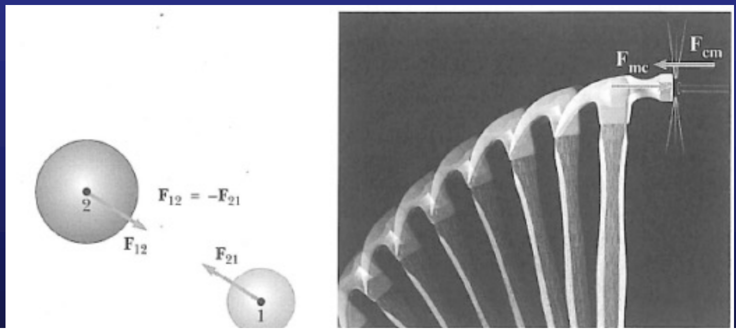
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} = 0$$

Tercera ley de Newton:
(principio de acción y reacción)

Si dos objetos interactúan, la fuerza F_{12} ejercida por el objeto 1 sobre el 2 es igual en módulo y dirección, pero opuesta en sentido, a la fuerza F_{21} ejercida por el objeto 2 sobre el objeto 1.

Las fuerzas siempre se producen por parejas. No puede existir una única fuerza aislada.

En todos los casos, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos diferentes, y deben ser del mismo tipo.



Notación

$$\vec{F}_{ab}$$

Fuerza ejercida por a sobre b

Aplicación de las leyes de Newton

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ji} = m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

Sumando para todas las partículas

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_{ji} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

Los sistemas de vectores $\vec{F}_i$ y $m_i \vec{a}_i$ tienen la misma resultante y el mismo momento resultante

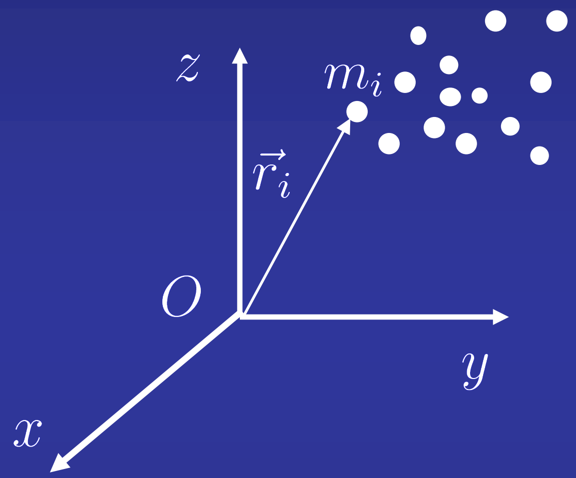
Momentos lineal y angular de un sistema de partículas

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \Rightarrow \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

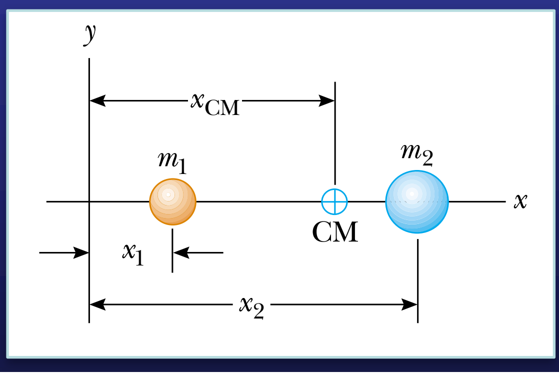
$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi}$$

Centro de masa de un sistema de partículas: Definición

La posición del centro de masas de un sistema se puede describir como la posición media de la masa del sistema



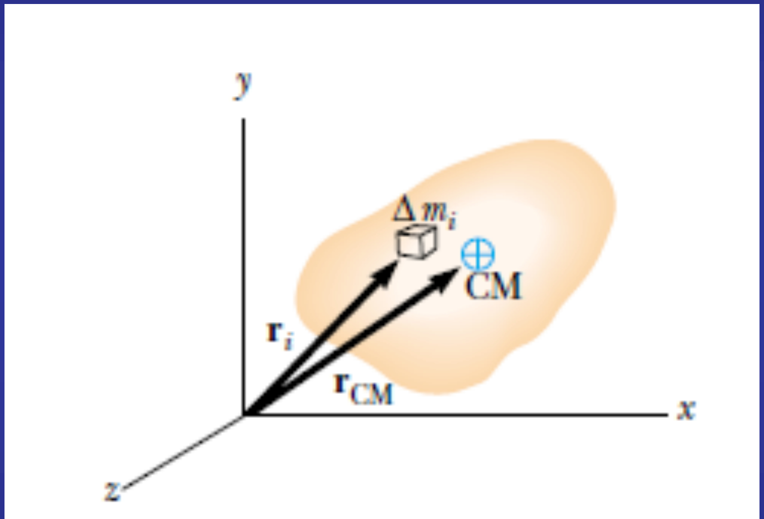
$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}
\left\{
\begin{array}{l}
x_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \\[2ex]
y_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \\[2ex]
z_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}
\end{array}
\right.$$



El centro de masas de dos partículas de masas diferentes se encuentra entre las dos partículas y más cerca de la de mayor masa

Centro de masa de un sistema continuo: Definición

La posición del centro de masas de un sistema se puede describir como la posición media de la masa del sistema



Podemos modelar el objeto no puntual como un sistema formado por un gran número de elementos.

Cada elemento se considera como una partícula de masa Δm_i y coordenadas $\vec{r}_i \equiv x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$

La separación entre las partículas en este modelo es muy pequeña, por lo que éste es una buena representación continua de masa del objeto.

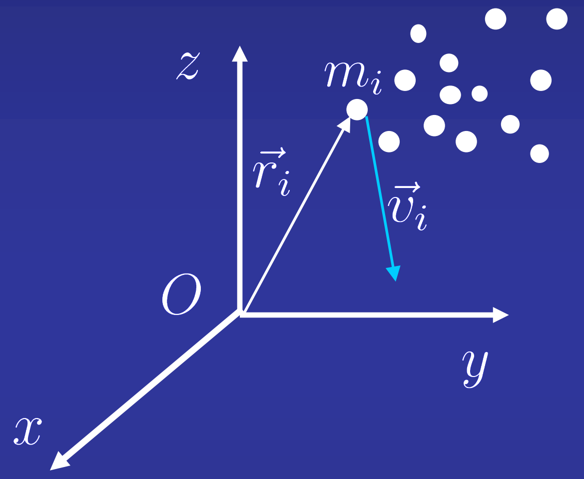
$$\vec{r}_{\rm CM} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \Delta m_i}{M}$$

Si establecemos que el número de partículas tiende a infinito (y como consecuencia el tamaño y la masa de cada elemento tiende a cero)

$$\vec{r}_{\rm CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Movimiento de un sistema de partículas: Definición de la velocidad del centro de masas

Suponiendo que ninguna partícula entra ni sale del sistema, de manera que M permanece constante



$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

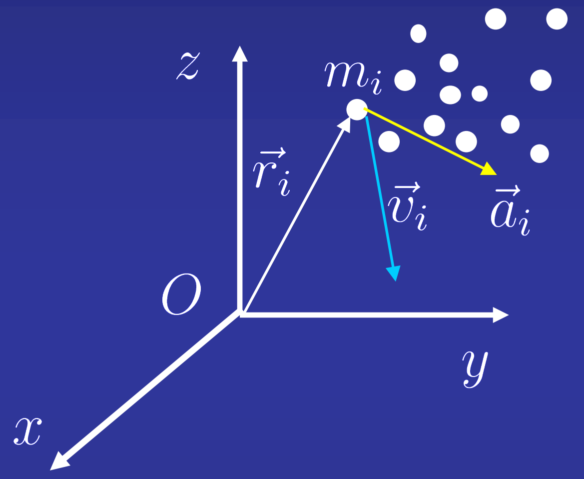
$$M\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}_{\mathrm{tot}}$$

La cantidad de movimiento total del sistema es igual a su masa total multiplicada por la velocidad del centro de masas.

La cantidad de movimiento total de una sola partícula de masa M que se mueve con la velocidad del centro de masa

Movimiento de un sistema de partículas: Definición de la aceleración del centro de masas

Si volvemos a derivar con respecto del tiempo, podemos obtener la aceleración del centro de masas



$$\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

$$M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

A priori, $\vec{F}_i$ son todas las fuerzas que actúan sobre la partícula i, tanto internas como externas.

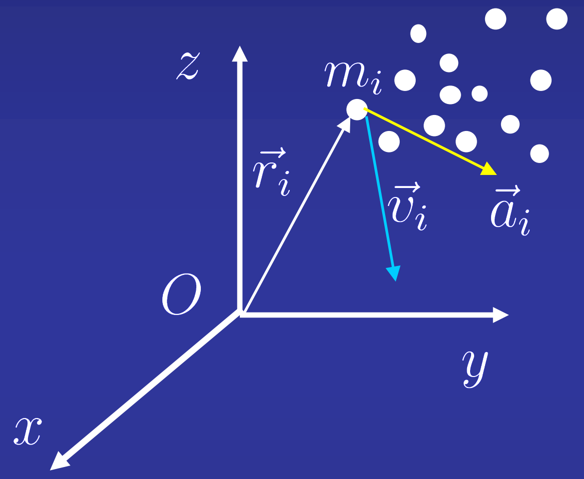
Sin embargo, como ya hemos visto, al sumar las fuerzas internas se cancelan dos a dos.

Por lo tanto, la fuerza neta ejercida sobre el sistema se debe sólo a las fuerzas externas.

$$\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{dt}$$

Movimiento de un sistema de partículas: Definición de la aceleración del centro de masas

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt}$$



La fuerza exterior neta ejercida sobre el sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masas o, lo que es lo mismo, a la variación de la cantidad de movimiento del sistema

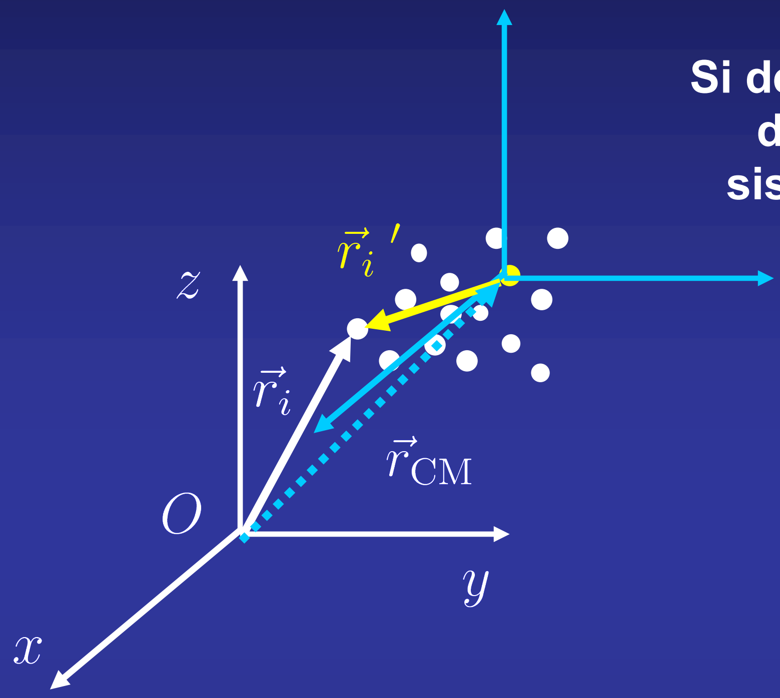
El centro de masas de un sistema se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza neta ejercida sobre el sistema.

En ausencia de fuerzas externas, el centro de masas se mueve con velocidad uniforme.

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = M\vec{a}_{\text{CM}} = 0$$

$$\vec{p}_{\text{tot}} = M\vec{v}_{\text{CM}} = \text{constante} \qquad \text{cuando} \quad \sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

Sistema de referencia del centro de masas



Si describimos las posiciones, velocidades y aceleraciones de todas las partículas del sistema con respecto a un sistema de referencia con origen en el centro de masas:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_i\,'$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_i'$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{\mathrm{CM}} + \vec{a}_i'$$

Por definición de posición y velocidad del centro de masas llegamos a las siguientes conclusiones

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_{\mathrm{CM}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\,' = M \vec{r}\,'_{\mathrm{CM}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{\mathrm{CM}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\,' = M \vec{v}\,'_{\mathrm{CM}} = 0$$

Energía cinética de un sistema de partículas

Aplicando la definición de energía cinética

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_i^{\,\prime}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{\mathrm{CM}}^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,\prime 2} + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{\mathrm{CM}} \cdot \vec{v}_i^{\,\prime} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \vec{v}_{\mathrm{CM}}^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,\prime 2} + \vec{v}_{\mathrm{CM}} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^{\,\prime} \right) \\
&= \frac{1}{2} M \vec{v}_{\mathrm{CM}}^{\,2} + K'
\end{aligned}
$$

$$K = K_{\mathrm{CM}} + K'$$

Relación entre momentos angulares para el sistema de laboratorio y el sistema de centro de masas

Aplicando la definición de momento angular

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_i\,'\right) \times m_i \left(\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_i\,'\right)$$

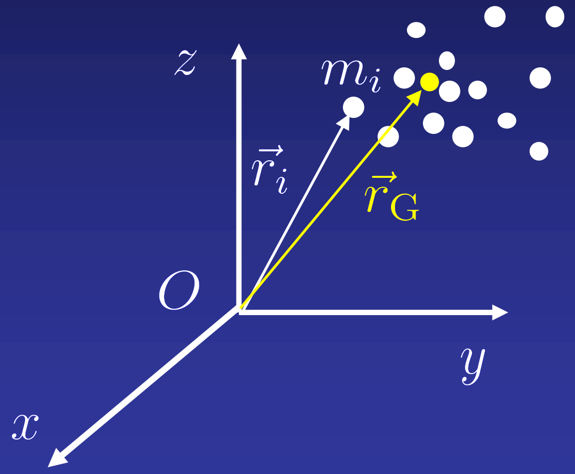
$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times m_i \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i\,' + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_i\,'$$

$$= \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\,'\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\,'\right) \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_i\,'$$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times M \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{L}_{\mathrm{CM}}$$

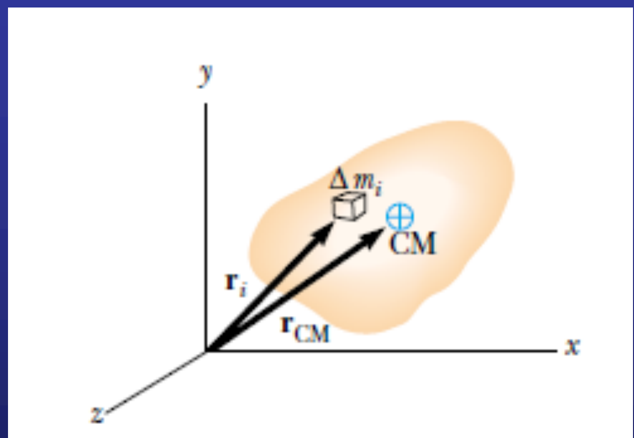
Cálculos de los centros de gravedad: Definición

Sistema discreto



$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Sistema continuo



$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\ dm}{\int dm}$$

Cálculos de los centros de gravedad en distintos sistemas continuos

Sistema homogéneo $(\rho\ \ \mathrm{constante})$

$$\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\int \vec{r}\ dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\ \rho\ d\Omega}{\int \rho\ d\Omega} = \frac{\int \vec{r}\ d\Omega}{\int d\Omega}$$

Placa homogénea de espesor constante $(t\ \ \mathrm{constante})$

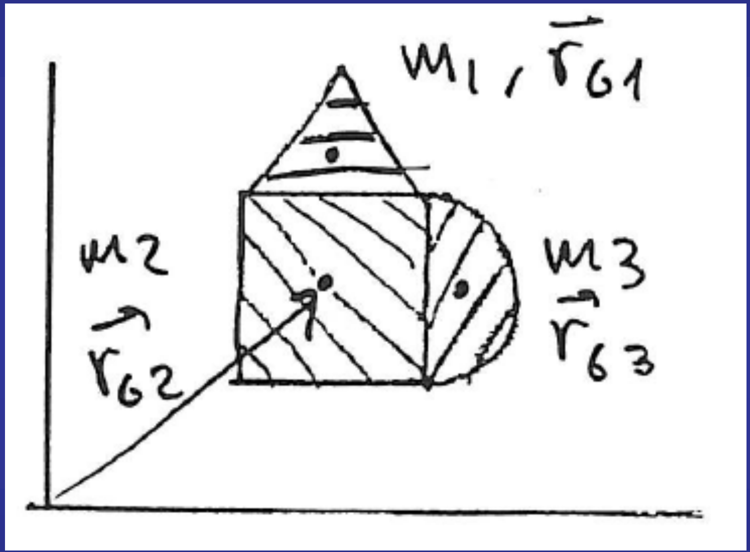
$$\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\int \vec{r}\ \rho\ t\ dA}{\int \rho\ t\ dA} = \frac{\int \vec{r}\ dA}{\int dA}$$

Hilo homogéneo de sección constante $(A\ \ \mathrm{constante})$

$$\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\int \vec{r}\ \rho\ A\ dl}{\int \rho\ A\ dl} = \frac{\int \vec{r}\ dl}{\int dl}$$

Cálculos de los centros de gravedad en distintos sistemas continuos

Si pudiéramos considerar el sistema como la suma de varios cuerpos



$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{Gi}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

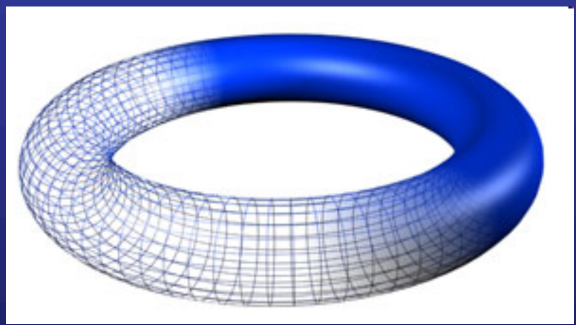
En el caso de que el sistema tuviera huecos, éstos podrían considerarse como subpartes de "masa negativa"

Cálculos de los centros de gravedad: Teoremas de Pappus-Guldin

Teoremas que relacionan superficies y volúmenes de sólidos de revolución

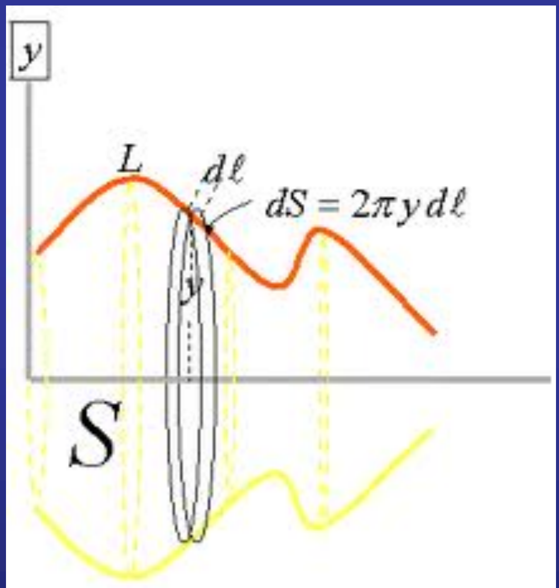
Un sólido de revolución es un cuerpo que puede obtenerse mediante una operación geométrica de rotación de una superficie plana alrededor de una recta contenida en su mismo plano.

Ejemplo: Un volumen con forma de toro se puede considerar como la rotación de un círculo



Cálculos de los centros de gravedad: Primer teorema de Pappus-Guldin

El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centro de gravedad de la curva cuando se engendra la superficie

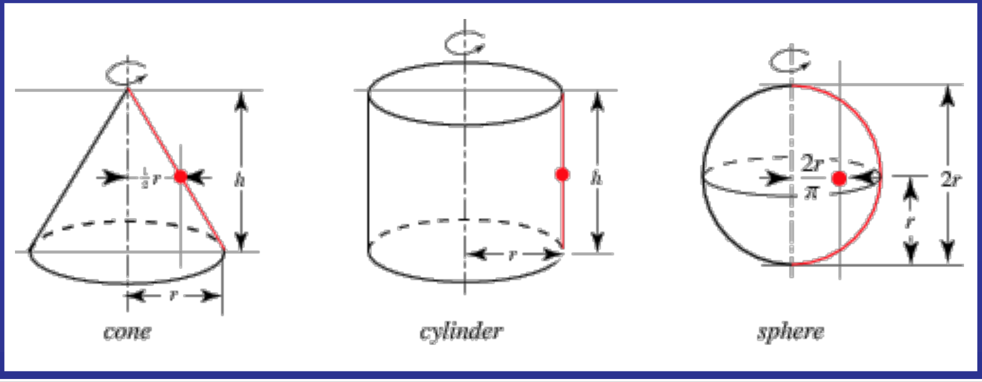


$$dA = 2\pi y dl \Rightarrow A = 2\pi \int y dl = 2\pi y_{\mathrm{G}} L$$

Cálculos de los centros de gravedad:
Primer teorema de Pappus-Guldin

El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centro de gravedad de la curva cuando se engendra la superficie

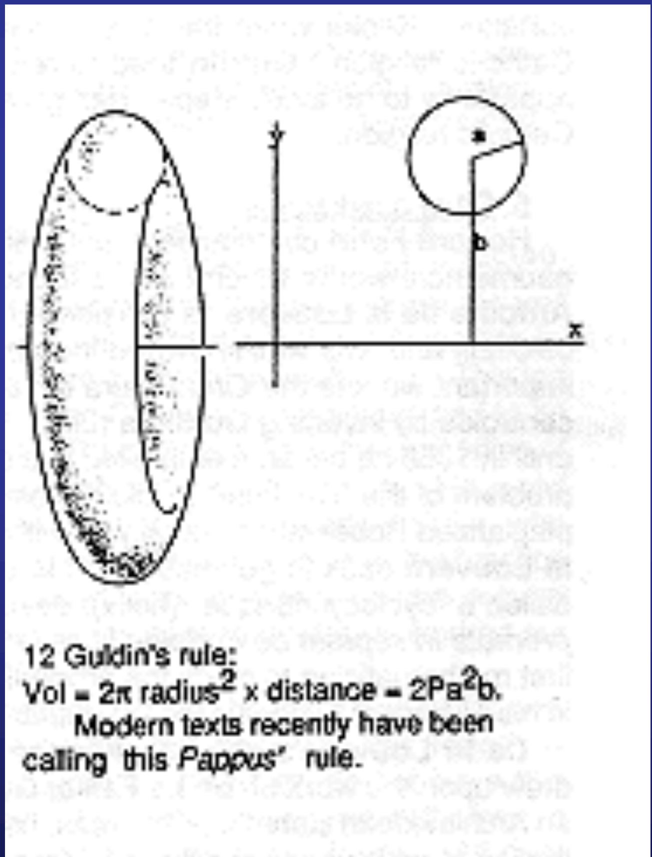
Conocido el centro de gravedad de la curva generatriz, se puede calcular el área de la superficie de revolución



solid	generating curve	s	$\bar{x}$	S
cone	inclined line segment	$\sqrt{r^2+h^2}$	$\frac{1}{2}r$	$\pi r\sqrt{r^2+h^2}$
cylinder	parallel line segment	h	r	$2\pi r h$
sphere	semicircle	πr	$\frac{2r}{\pi}$	$4\pi r^2$

Cálculos de los centros de gravedad: Segundo teorema de Pappus-Guldin

El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centro de gravedad del área cuando se engendra el cuerpo

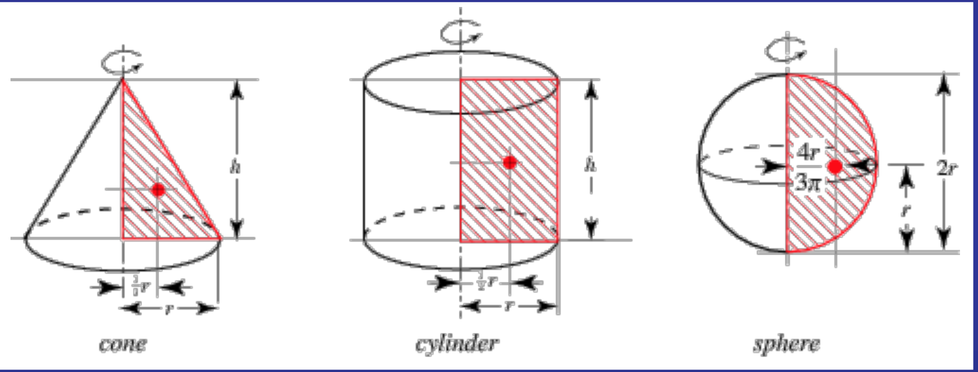


$$d\Omega = 2\pi y dA \Rightarrow \Omega = 2\pi \int y dA = 2\pi y_{\mathrm{G}} A$$

Cálculos de los centros de gravedad: Segundo teorema de Pappus-Guldin

El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centro de gravedad del área cuando se engendra el cuerpo

Conocido el área de la superficie generatriz, se puede calcular el volumen del cuerpo de revolución



solid	generating lamina	A	$\overline{x}$	V
cone	right triangle	$\frac{1}{2}hr$	$\frac{1}{3}r$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
cylinder	rectangle	hr	$\frac{1}{2}r$	$\pi r^2 h$
sphere	semicircle	$\frac{1}{2}\pi r^2$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

Sistemas de masa variable: propulsión de un cohete

El funcionamiento de un cohete que se mueve en el espacio vacío depende de la ley de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema, donde el sistema está formado por el cohete y el carburante expulsado

Cuando un cohete se mueve en el espacio vacío, su cantidad de movimiento varía cuando parte de su masa es liberada en forma de gases

Dado que los gases expulsados adquieren cierta cantidad de movimiento, el cohete adquiere cierta cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta

Por lo tanto el cohete se acelera como resultado del “empuje” de los gases expulsados

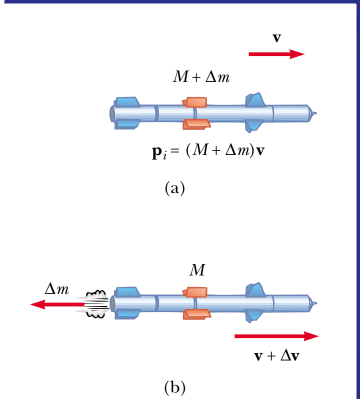
El cohete representa el “inverso” de la colisión inelástica:

la cantidad de movimiento se conserva, pero la energía cinética del sistema aumenta (a expensas de la energía almacenada en el carburante del cohete)

Sistemas de masa variable: propulsión de un cohete

Supongamos que en un determinado instante t el módulo de la cantidad de movimiento del cohete más es el carburante con respecto a un sistema de referencia estacionario es

$$(M + \Delta m)v$$



Durante un corto intervalo de tiempo Δt el cohete expulsa una cantidad de carburante de masa Δm y su velocidad aumenta como consecuencia a $v + \Delta v$

Si el carburante se expulsa con velocidad relativa v_e con respecto del cohete, la velocidad del carburante con respecto de un sistema de referencia estacionario es $v - v_e$

Si igualamos la cantidad de movimiento inicial del sistema completo con la cantidad de movimiento final

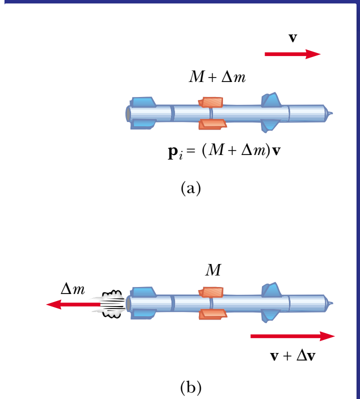
$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

$$M \Delta v = \Delta m \, v_e$$

Sistemas de masa variable: propulsión de un cohete

$$M\Delta v = \Delta m\, v_e$$

Si tomamos el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$



$$\Delta v \rightarrow dv \qquad \Delta m \rightarrow dm$$

Además, el incremento de la masa expulsada dm se corresponde con una disminución igual en la masa del cohete

$$dm = -dM$$

$$\Downarrow$$

$$M dv = -v_e dM$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

Masa final del cohete más el carburante no consumido

Masa inicial del cohete más el carburante

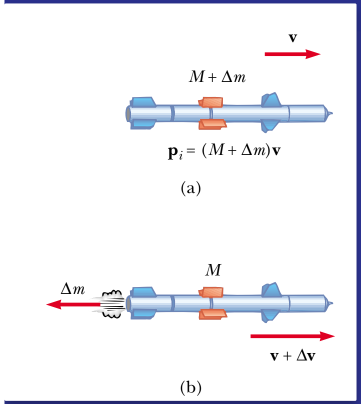
El incremento en el valor de la velocidad es proporcional a la velocidad de salida de los gases (que debe ser entonces la mayor posible)

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

Sistemas de masa variable: propulsión de un cohete

Tiempo que tarda el cohete en alcanzar una determinada velocidad

En $t = 0$ **parte con una masa** M_i



Supongamos que la tasa de expulsión de gases es constante $\mu = dM/dt$

Entonces, $M = M_i - \mu t$

$$M dv = -v_e dM \Rightarrow dv = -v_e \mu \frac{dt}{M_i - \mu t}$$

Integrando

$$v = -v_e \ln \left[1 - \frac{\mu t}{M_i} \right]$$

Despejando t

$$t(v) = \frac{M_i}{\mu} \left(1 - e^{-v/v_e} \right)$$

Sistemas de masa variable: propulsión de un cohete

El empuje sobre el cohete es la fuerza ejercida sobre el mismo por los gases expulsados

Supongamos que en un tiempo Δt el cohete se desprende de una cantidad de masa Δm que sale con una velocidad v_e

Supongamos que la masa sale del cohete con un tasa constante $\mu = dM/dt$ (masa por segundo)

La cantidad de momento que sale del cohete es $(\mu \Delta t) v_e$

Como la acción es igual a la reacción, este momento es transferido al cohete.
El momemto total por unidad de tiempo (o lo que es lo mismo, el empuje instantáneo sobre el cohete es

$$\text{Empuje instantaneo} = \mu v_e = v_e \frac{dM}{dt}$$

Aumenta a medida que aumentan la velocidad de salida de los gases y la tasa de variación de la masa (velocidad de consumo de carburante)