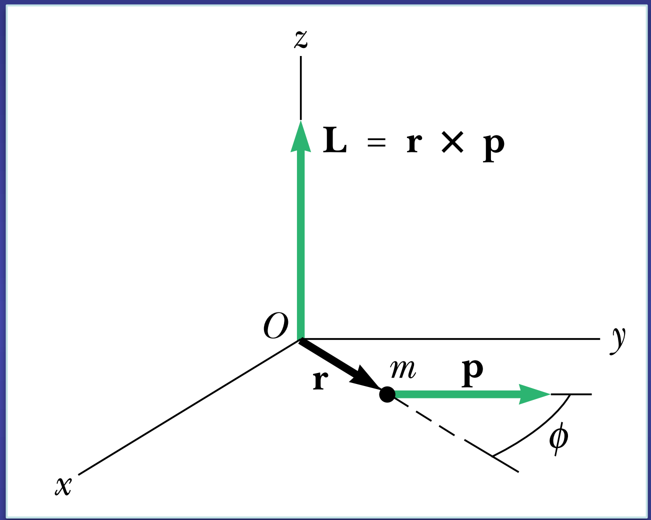
# Momento angular




Javier Junquera

# Bibliografía

**FUENTE PRINCIPAL**

**Física, Volumen 1, 3° edición**

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Ed. Thomson

ISBN: 84-9732-168-5

Capítulo 10

**Física para Ciencias e Ingeniería, Volumen 1, 7° edición**

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Cengage Learning

ISBN 978-970-686-822-0

Capítulo 11

**Tips on Physics**

R. P. Feynman, R. B. Leighton, y M. Sands

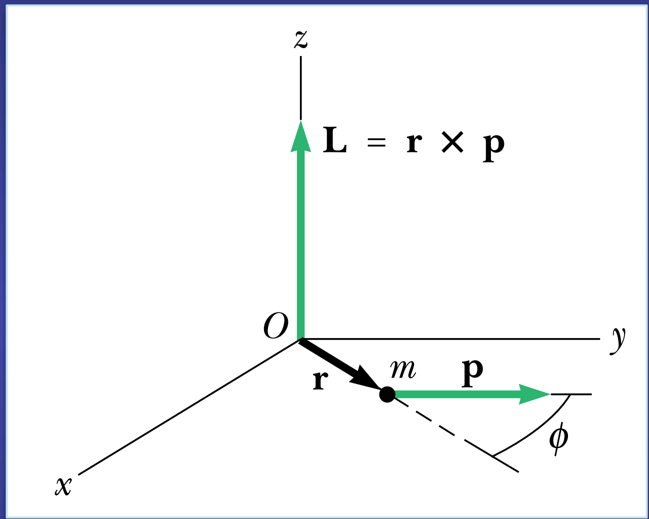
Ed. Pearson Addison Wesley

ISBN: 0-8053-9063-4

Capítulo 3-3 y siguientes

# Definición de momento angular o cinético

Consideremos una partícula de masa $m$, con un vector de posición $\vec{r}$
y que se mueve con una cantidad de movimiento $\vec{p}$



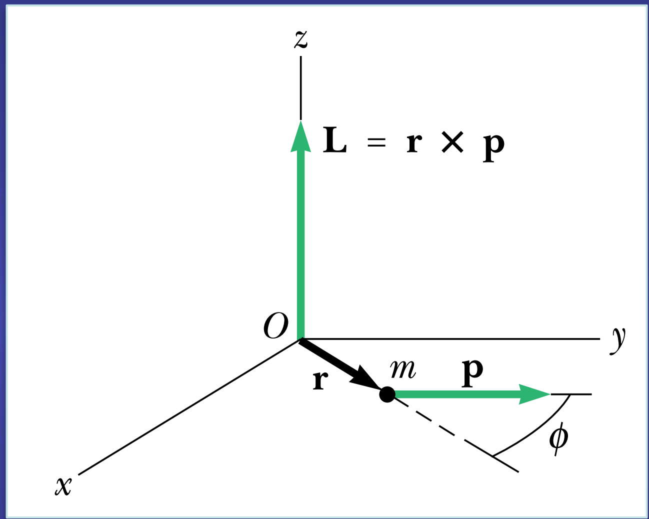

El momento angular instantáneo $\vec{L}$ de la partícula relativo al origen $O$ se define como el producto vectorial de su vector posición instantáneo y del momento lineal instantáneo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

# Definición de momento angular o cinético

**Consideremos una partícula de masa $m$, con un vector de posición $\vec{r}$ y que se mueve con una cantidad de movimiento $\vec{p}$**

**Tanto el módulo, la dirección como el sentido del momento angular dependen del origen que se elija**




$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m\,(\vec{r} \times \vec{v})$$

**Dirección:** perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{p}$

**Sentido:** regla de la mano derecha

**Módulo:** $|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{v}|\sin\phi$

**Unidades SI:** kg • m$^2$/s

# Momento angular o cinético: Casos particulares

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m\,(\vec{r} \times \vec{v})$$

$\vec{L} = 0$ cuando $\vec{r}$ es paralelo a $\vec{p}$. Es decir, cuando la partícula se mueve a lo largo de una línea recta que pasa por el origen tiene un momento angular nulo con respecto a ese origen

$|\vec{L}|$ **máxima** cuando $\vec{r}$ es perpendicular a $\vec{p}$. En ese momento la partícula se mueve exactamente igual que si estuviera en el borde de una rueda que gira alrededor del origen en el plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{p}$ **(movimiento circular).**

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{Módulo} & L = mvr = m\omega r^2 \\ \textbf{Dirección y sentido} & \vec{L} \parallel \vec{\omega} \end{array}\right\} \vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

# Conservación del momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \cancel{\vec{v} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

**En general, si sobre la partícula actuase más de una fuerza**

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

**Ecuación análoga para las rotaciones de las segunda ley de Newton para las traslaciones**

**Esta ecuación es válida:**

**- sólo si los momentos de todas las fuerzas involucradas y el momento angular se miden con respecto al mismo origen.**

**-válida para cualquier origen fijo en un sistema de referencia inercial.**

# Conservación del momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \cancel{\vec{v} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

**Si** $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \mathrm{constante}$

**Esto se verifica si:**

**La fuerza se anula** $\vec{F} = 0$ **(caso, por ejemplo, de la partícula libre)**

**La fuerza es paralela a la posición** $\vec{F} \parallel \vec{r}$ **(fuerzas centrales)**

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$ **(ley de Gravitación Universal)**

# Analogías entre rotaciones y traslaciones

## Traslaciones

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Una fuerza neta sobre una partícula produce un cambio en el momento lineal de la misma

Una fuerza neta actuando sobre una partícula es igual a la razón de cambio temporal del momento lineal de la partícula

## Rotaciones

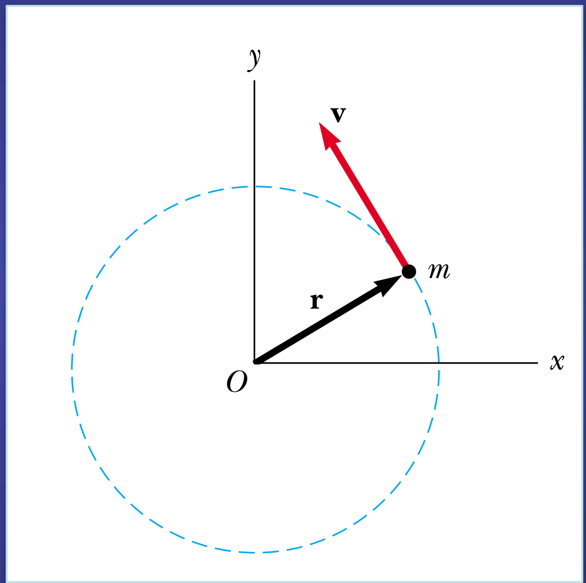
$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Un torque neto sobre una partícula produce un cambio en el momento angular de la misma

Una torque neto actuando sobre una partícula es igual a la razón de cambio temporal del momento angular de la partícula

# Momento angular de una partícula en un movimiento circular

**Supongamos una partícula que se mueve en el plano $xy$ en un movimiento circular de radio $r$. Hallar la magnitud y dirección de su momento angular con respecto al origen $O$ si su velocidad lineal es $\vec{v}$**




**Como el momento lineal de la partícula está en constante cambio (en dirección, no en magnitud), podríamos pensar que el momento angular de la partícula también cambia de manera contínua con el tiempo**

**Sin embargo este no es el caso**

**Magnitud**

$$L = mvr \sin 90^\circ = mvr$$

**Dirección**

**Perpendicular al plano de la pantalla y saliendo hacia fuera (regla de la mano derecha)**

**Una partícula en un movimiento circular uniforme tiene un momento angular constante con respecto a un eje que pase por el centro de la trayectoria**

# Momento angular total de un sistema de partículas

**El momento angular total de un sistema de partículas con respecto a un determinado punto se define como la suma vectorial de los momento angulares de las partículas individuales con respecto a ese punto.**

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

**En un sistema continuo habría que reemplazar la suma por una integral**

# Momento angular total de un sistema de partículas

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i$$

**A priori, para cada partícula $i$ tendríamos que calcular el torque asociado con:**

**- fuerzas internas entre las partículas que componen el sistema**

**- fuerzas externas**

**Sin embargo, debido al principio de acción y reacción, el torque neto debido a las fuerzas internas se anula.**

**Se puede concluir que el momento angular total de un sistema de partículas puede variar con el tiempo si y sólo si existe un torque neto debido a las fuerzas externas que actúan sobre el sistema**

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt}$$

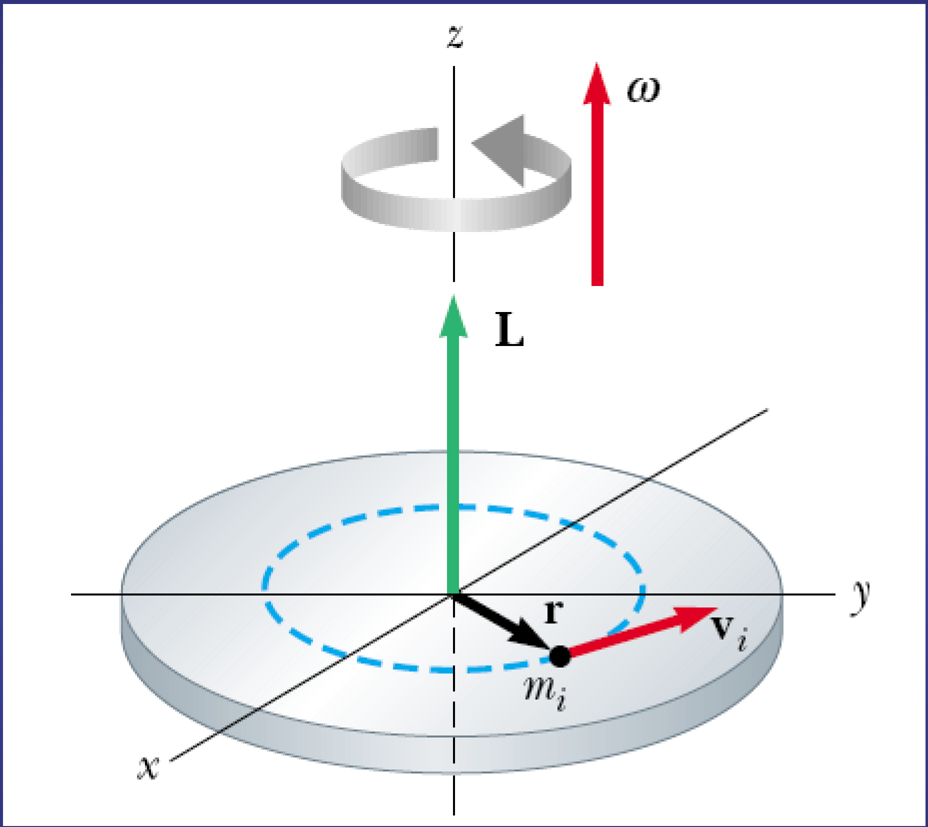
# Momento angular total de un sistema de partículas

$$\sum \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\mathrm{tot}}}{dt}$$

**El torque neto (con respecto a un eje que pase por un origen en un sistema de referencia inercial) debido a las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es igual al ritmo de variación del momento angular total del sistema con respecto a dicho origen**

# Momento angular de un sólido rígido en rotación

**Consideremos una placa que rota alrededor de un eje perpendicular y que coincide con el eje $z$ de un sistema de coordenadas**




**Cada partícula del objeto rota en el plano $xy$ alrededor del eje $z$ con una celeridad angular $\omega$**

**El momento angular de una partícula de masa $m_i$ que rota en torno al eje $z$ es**

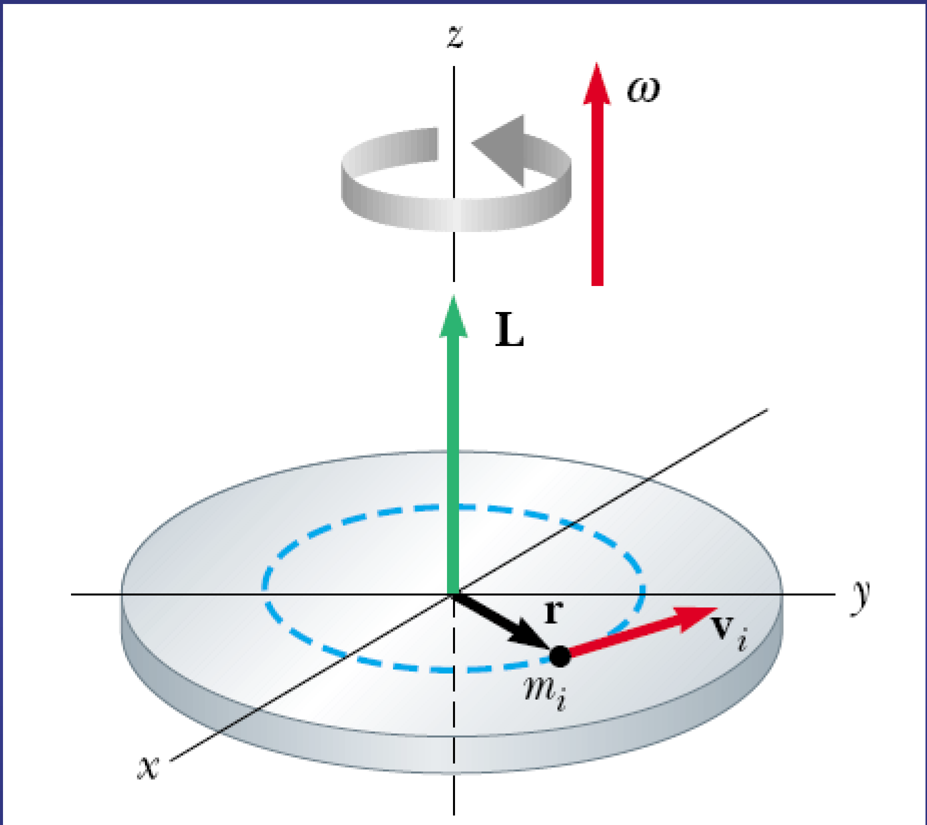
$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]$$

$$= m_i \left[\vec{\omega}\left(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i\right) - \vec{r}_i \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i\right)\right] = m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

**Y el momento angular del sistema angular (que en este caso particular sólo tiene componente a lo largo de $z$)**

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2 \vec{\omega}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right) \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

# Momento angular de un sólido rígido en rotación




Y el momento angular del sistema angular (que en este caso particular sólo tiene componente a lo largo de $z$)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left( m_i r_i^2 \vec{\omega} \right) = \left( \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

Donde se ha definido el momento de inercia del objeto con respecto al eje $z$ como

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

En este caso particular, el momento angular tiene la misma dirección que la velocidad angular

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

# Momento angular de un sólido rígido en rotación

**En general, la expresión $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ no siempre es válida.**

**Si un objeto rígido rota alrededor de un eje arbitrario, el momento angular y la velocidad angular podrían apuntar en direcciones diferentes.**

**En este caso, el momento de inercia no puede ser tratado como un escalar.**

**Estrictamente hablando, $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ se aplica sólo en el caso de un sólido rígido de cualquier forma que rota con respecto a uno de los tres ejes mutuamente perpendiculares (denominados ejes principales de inercia) y que pasan por su centro de masa.**

# Ecuación del movimiento para la rotación de un sólido rígido

**Supongamos que el eje de rotación del sólido coincide con uno de sus ejes principales, de modo que el momento angular tiene la misma dirección que la velocidad angular**

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

**Derivando esta expresión con respecto al tiempo**

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \frac{dI}{dt}\vec{\omega} + I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dI}{dt}\vec{\omega} + I\vec{\alpha}$$

**Si asumimos que el momento de inercia no cambia con el tiempo (esto ocurre para un cuerpo rígido)**

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = I\vec{\alpha}$$

**El torque externo neto que actúa sobre un sólido rígido que rota alrededor de un eje fijo es igual al momento de inercia con respecto al eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto con respecto a ese eje**

$$\text{Si} \quad \sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \text{constante}$$

# Ecuación del movimiento para la rotación de un sólido rígido

Supongamos que el eje de rotación del sólido no coincide con uno de sus ejes principales, de modo que el momento angular tiene la misma dirección que la velocidad angular

$$\vec{L} \neq I\vec{\omega}$$

$$\text{si } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

Pero como el momento angular ya no es paralelo a la velocidad angular, ésta no tiene por qué ser constante

$$\vec{\omega} \text{ no es constante}$$

# Conservación del momento angular

**El momento angular total de un sistema es contante, tanto en dirección como en módulo si el torque resultante debido a las fuerzas externas se anula**

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}} = \quad \text{constante} \qquad \text{o} \qquad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

**Tercera ley de conservación: en un sistema aislado se conserva:**

- **energía total**
- **el momento lineal**
- **el momento angular**

**El principio de conservación del momento angular es un resultado general que se puede aplicar a cualquier sistema aislado.**
**El momento angular de un sistema aislado se conserva tanto si el sistema es un cuerpo rígido como si no lo es.**

# Conservación del momento angular

**El momento angular total de un sistema es contante, tanto en dirección como en módulo si el torque resultante debido a las fuerzas externas se anula**

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}} = \text{ constante} \qquad \text{o} \qquad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

**Para un sistema aislado consistente en un conjunto de partículas, la ley de conservación se escribe como**

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{constante}$$

# Conservación del momento angular

Si la masa de un sistema aislado que rota sufre un redistribución, el momento de inercia cambia

Como la magnitud del momento angular del sistema es

$$L = I\omega$$

La ley de conservación del momento angular requiere que el producto de $I$ por ω permanezca constante

**Es decir, para un sistema aislado, un cambio en $I$ requiere un cambio en ω**

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{constante}$$

Esta expresión es válida para:

- una rotación en torno a un eje fijo.
- una rotación alrededor de un eje que pase por el centro de masas de un sistema que rota.

Lo único que se requiere es que el torque neto de la fuerza externa se anule

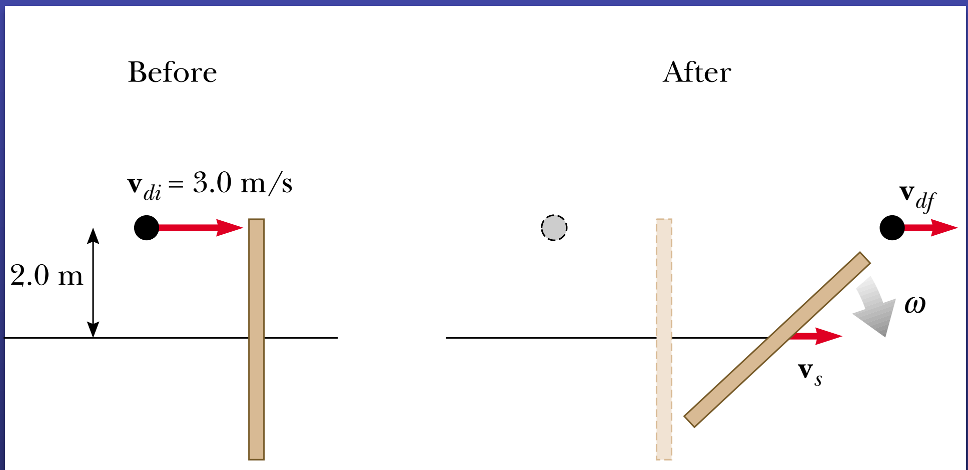
# Problema de conservación del momento angular

Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.

Encontrar:

(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión
(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión
(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión

El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg $m^2$




Como el disco y la barra forman un sistema aislado y la colisión es elástica:

- Se conserva la energía total
- Se conserva el momento lineal
- Se conserva el momento angular

Tenemos tres incógnitas y tres leyes de conservación

# Problema de conservación del momento angular

**Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.**

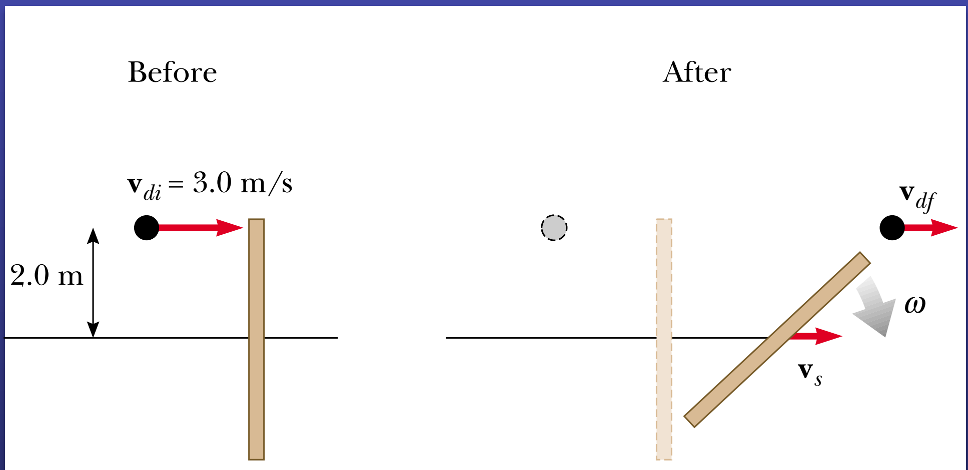
**Encontrar:**

**(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión**

**(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión**

**(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión**

**El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg m$^2$**




**Como el disco y la barra forman un sistema aislado y la colisión es elástica:**

**Conservación del momento lineal**

$$p_i = p_f$$

$$m_d v_{di} = m_d v_{df} + m_b v_{bf}$$

# Problema de conservación del momento angular

**Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.**

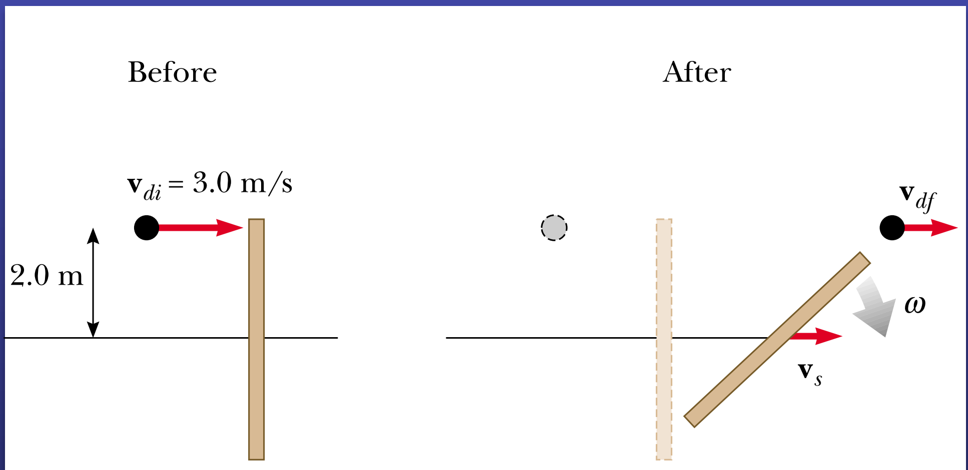
**Encontrar:**

**(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión**

**(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión**

**(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión**

**El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg $m^2$**




**Como el disco y la barra forman un sistema aislado y la colisión es elástica:**

**Conservación del momento angular**

**La componente del momento angular del disco a lo largo de la dirección perpendicular al plano del hielo es negativa (regla de la mano derecha)**

$$L_i = L_f$$

$$-rm_d v_{di} = -rm_d v_{df} + I\omega$$

# Problema de conservación del momento angular

**Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.**

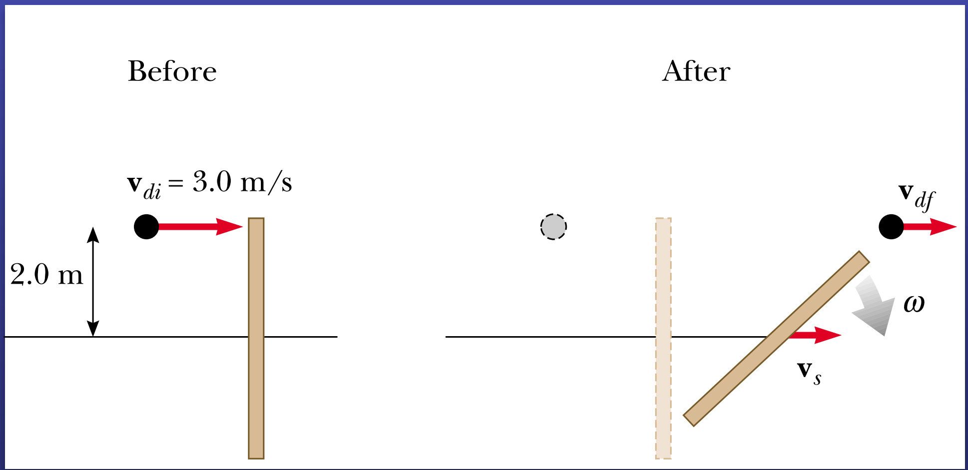
**Encontrar:**

**(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión**

**(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión**

**(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión**

**El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg m$^2$**




**Como el disco y la barra forman un sistema aislado y la colisión es elástica:**

**Conservación de la energía mecánica**

**Solo tenemos energía cinética (tanto en su forma translacional como rotacional**

$$K_i = K_f$$

$$\frac{1}{2}m_d v_{di}^2 = \frac{1}{2}m_d v_{df}^2 + \frac{1}{2}m_b v_{bf}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

# Problema de conservación del momento angular

**Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.**

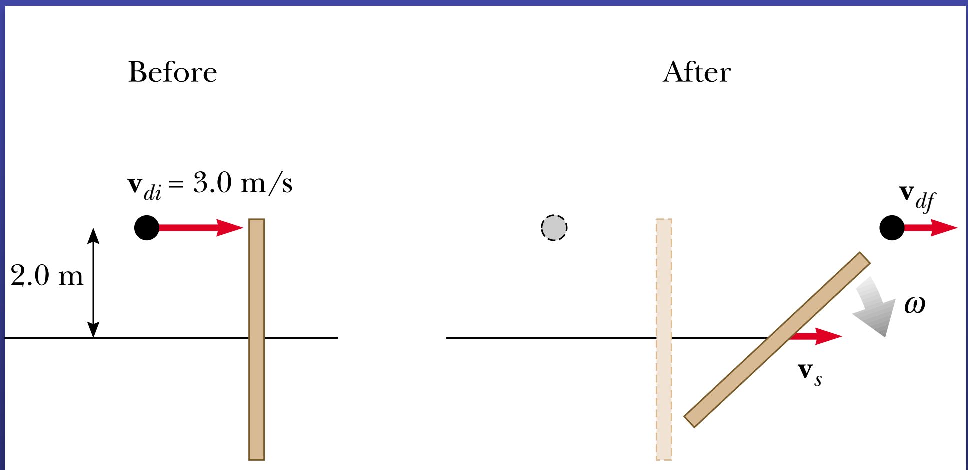
**Encontrar:**

**(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión**

**(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión**

**(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión**

**El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg m$^2$**




**Resolvemos el sistema de las tres ecuaciones con tres incógnitas**

$$m_d v_{di} = m_d v_{df} + m_b v_{bf}$$

$$-r m_d v_{di} = -r m_d v_{df} + I\omega$$

$$\frac{1}{2} m_d v_{di}^2 = \frac{1}{2} m_d v_{df}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{bf}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

**Despejando variables en la primera y segunda ecuación, y sustituyendo en la tercera**

$$v_{bf} = \frac{1}{m_b}\left(m_d v_{di} - m_d v_{df}\right)$$

$$\omega = \frac{1}{I}\left(-r m_d v_{di} + r m_d v_{df}\right)$$

$$\left(m_d - \frac{m_d^2}{m_b} - \frac{r^2 m_d^2}{I}\right) v_{di}^2 = \left(m_d + \frac{m_d^2}{m_b} + \frac{r^2 m_d^2}{I}\right) v_{df}^2 - 2 m_d^2 v_{di} \left(\frac{1}{m_b} + \frac{r^2}{I}\right) v_{\ldots}$$

# Problema de conservación del momento angular

**Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.**

**Encontrar:**

**(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión**

**(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión**

**(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión**

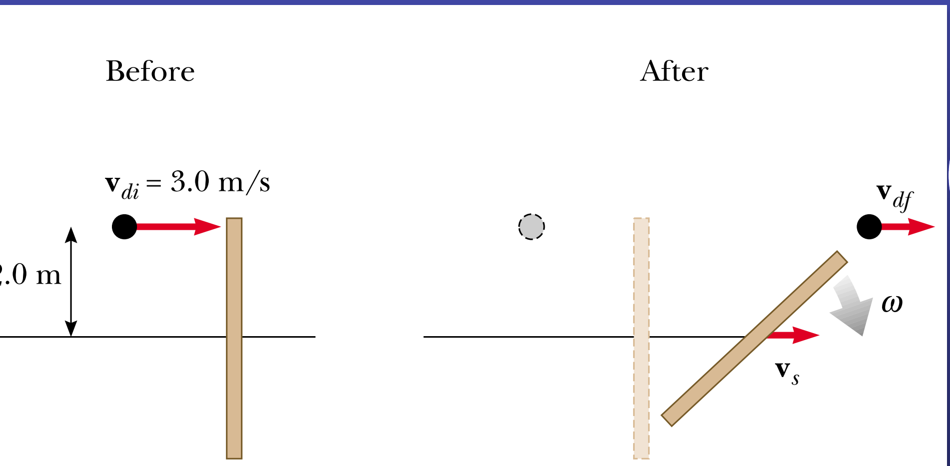
**El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg m$^2$**

**Despejando variables en la primera y segunda ecuación, y sustituyendo en la tercera**

$$v_{bf} = \frac{1}{m_b}\left(m_d v_{di} - m_d v_{df}\right)$$

$$\omega = \frac{1}{I}\left(-r m_d v_{di} + r m_d v_{df}\right)$$

$$\left(m_d - \frac{m_d^2}{m_b} - \frac{r^2 m_d^2}{I}\right) v_{di}^2 = \left(m_d + \frac{m_d^2}{m_b} + \frac{r^2 m_d^2}{I}\right) v_{df}^2 - 2 m_d^2 v_{di} \left(\frac{1}{m_b} + \frac{r^2}{I}\right) v$$




**Sustituyendo datos y resolviendo la ecuación de segundo grado**

$$v_{df} = 2.33 \ \mathrm{m/s}$$

$$v_{bf} = 1.34 \ \mathrm{m/s}$$

$$\omega = -2.0 \ \mathrm{rad/s}$$

**(La otra solución carece de sentido físico)**

# Problema de conservación del momento angular

**Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es perfectamente inelástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.**

**Encontrar:**

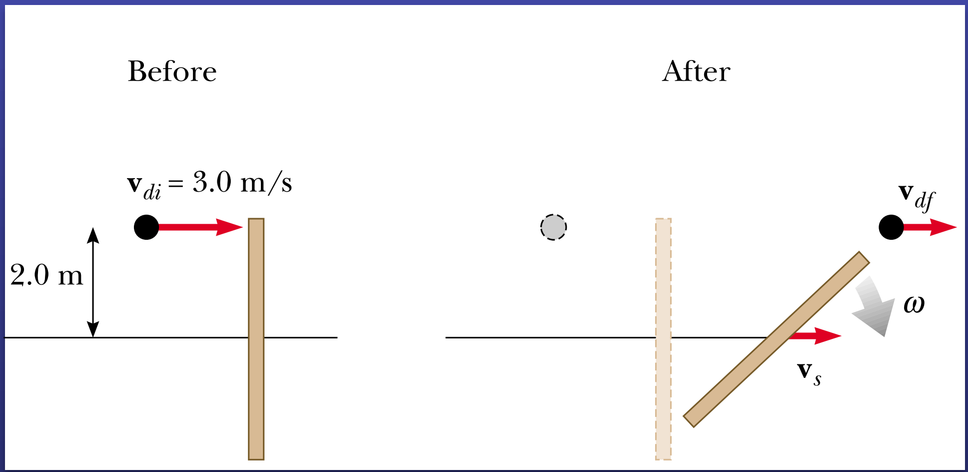
**(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión**

**(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión**

**(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión**

**El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg m$^2$**

**¿Qué pasaría si la colisión fuera perfectamente inelástica?**




**En este caso, el disco se adhiere a la barra después de la colisión**

**Conservación del momento lineal**

$$p_i = p_f$$

$$m_d v_{di} = (m_d + m_b)\, v_{\mathrm{CM}}$$

$$v_{\mathrm{CM}} = 2.0 \ \mathrm{ms}$$

# Problema de conservación del momento angular

Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es perfectamente inelástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.

Encontrar:

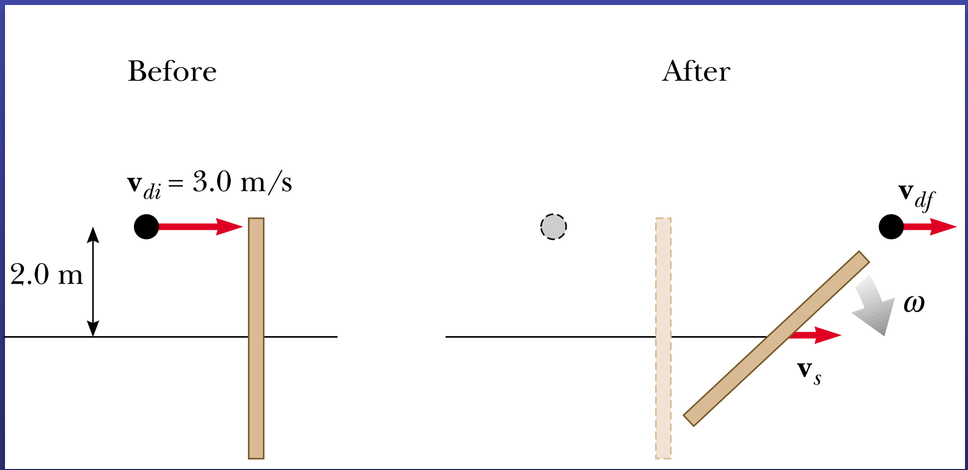
(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión

(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión

(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión

El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg m$^2$

¿Qué pasaría si la colisión fuera perfectamente inelástica?




## Cálculo del centro de masas (necesario para la parte rotacional)

Tomamos el centro de la barra como origen

Justo en el instante de la colisión, la posición $y$ del centro de masas estará en

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{(2.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m}) + (1.0 \text{ kg})(0)}{(2.0 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg})} = 1.33 \text{ m}$$

Es decir, a 0,67 m del borde superior de la barra

# Problema de conservación del momento angular

**Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es perfectamente inelástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.**

**Encontrar:**

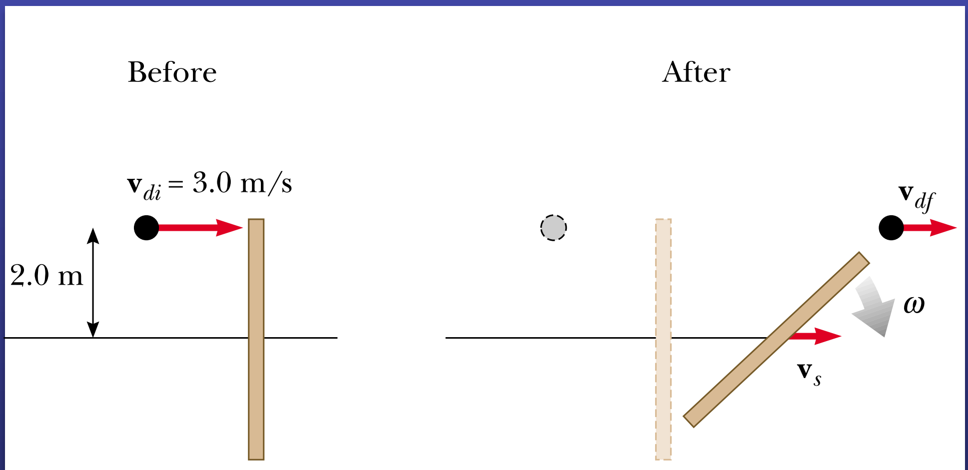
**(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión**

**(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión**

**(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión**

**El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg m$^2$**

**¿Qué pasaría si la colisión fuera perfectamente inelástica?**




**Conservación del momento angular**

$$L_i = L_f$$

$$-rm_d v_{di} = I_d\omega + I_b\omega$$

$r$ **ahora es la distancia del disco al CDM (0.67 m)**

**El sistema va a rotar con respecto al centro de masas, así que tenemos que calcular los nuevos momentos de inercia de la barra (teorema de Steiner)**

$$I_d = MD^2$$
$$= (2.00\ \text{kg})(0.67\ \text{m})^2 = 0.90\ \text{kg m}^2$$

$$I_b = I_{\text{CM}} + MD^2$$
$$= 1.33\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + (1.00\ \text{kg})(1.33\ \text{m})^2 = 3.10\ \text{kg}\cdot\text{m}$$

# Problema de conservación del momento angular

**Un disco de 2.0 kg que vuela con una celeridad de 3.0 m/s golpea una barra de 1 kg y longitud 4.0 m que se apoya sobre una superficie de hielo sin rozamiento. Asumimos que la colisión es perfectamente inelástica y que el disco no se desvía de su trayectoria original.**

**Encontrar:**

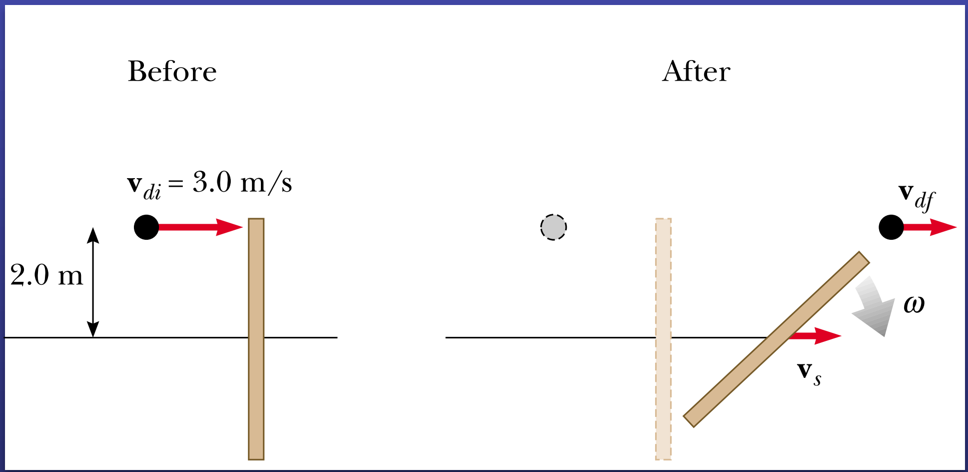
**(a) La celeridad de traslación del disco después de la colisión**

**(b) La celeridad de traslación de la barra después de la colisión**

**(c) La velocidad angular de la barra después de la colisión**

**El momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masas es de 1.33 kg m$^2$**

**¿Qué pasaría si la colisión fuera perfectamente inelástica?**




**Conservación del momento angular**

$$L_i = L_f$$

$$-rm_d v_{di} = I_d\omega + I_b\omega$$

**Despejando la velocidad angular y sustituyendo los valores anteriores**

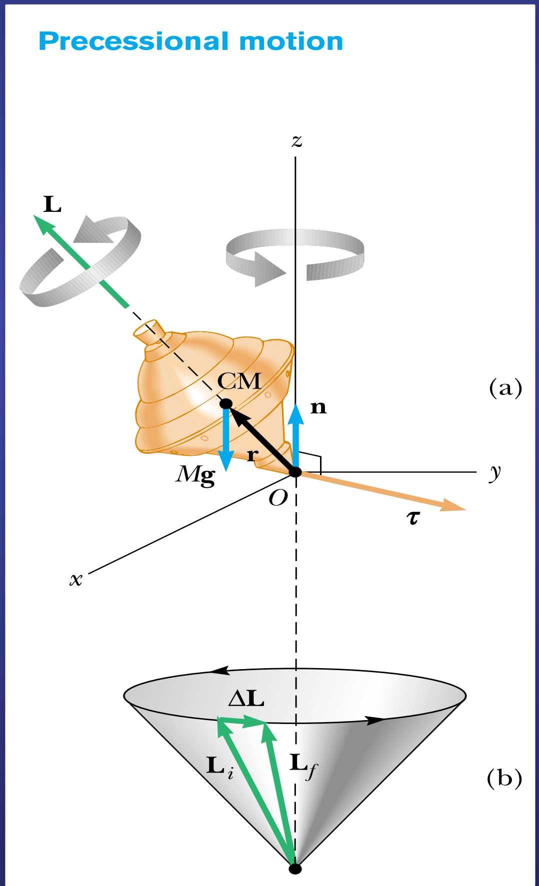
$$\omega = -1.0\ \mathrm{rad/s}$$

# Movimiento de precesión de los giróscopos

**Trompo:** cuerpo simétrico que gira alrededor de un eje de simetría mientras un punto de este eje permanece fijo (una peonza)

**Giróscopo:** caso particular de un trompo en el que el punto fijo pasa por el centro de masas

**Supongamos el movimiento de una peonza que gira rápidamente entorno a su eje de simetría**



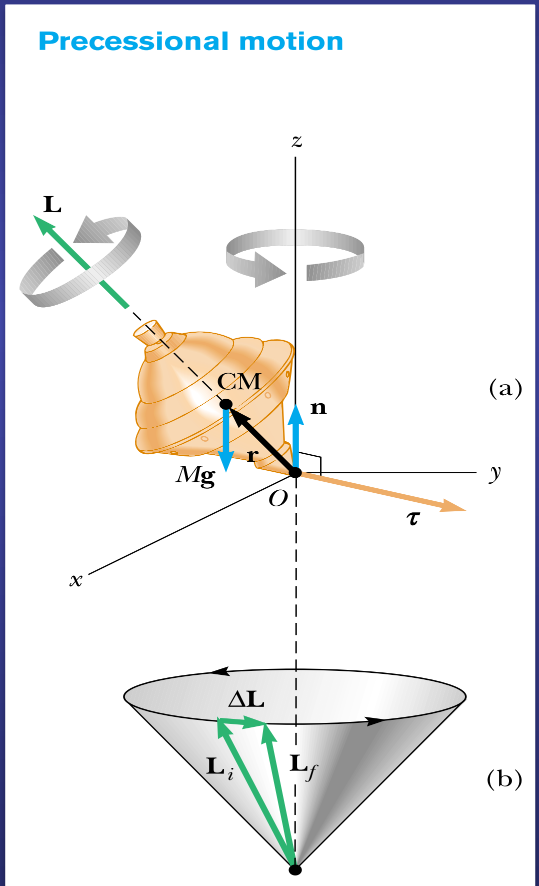

**La peonza actúa como un giróscopo y cabría esperar que su orientación en el espacio permaneciera invariable**

**Sin embargo, si la peonza está inclinada, se observa que su eje de simetría gira alrededor del eje $Z$, formando en su desplazamiento la figura de un cono.**
**A este movimiento se le denomina movimiento de precesión**

**La velocidad angular del eje de simetría alrededor del eje vertical es normalmente lenta con respecto a la velocidad angular de la peonza alrededor de su eje de simetría**

# Movimiento de precesión de los giróscopos
# Origen del movimiento de precesión

¿Por qué la peonza no mantiene su dirección de giro?




Como el centro de masas de la peonza no se encuentra directamente sobre el punto de pivote $O$, hay un par neto con respecto a $O$ que actúa sobre la peonza.

El par está producido por la fuerza de la gravedad $M\vec{g}$

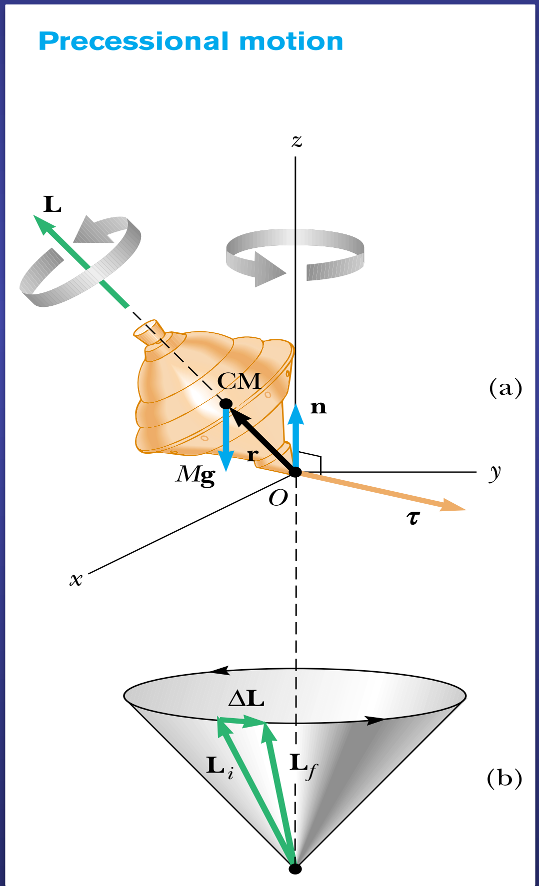
Si no estuviera girando, la peonza caería

Como está girando, la peonza tiene un momento angular $\vec{L}$ cuya dirección coincide con el eje de simetría de la peonza

**El par provoca un cambio en la dirección del eje de simetría que a la postre es el responsable del movimiento de este eje de simetría con respecto al eje $z$**

# Movimiento de precesión de los giróscopos
# Origen del movimiento de precesión

¿Por qué la peonza no mantiene su dirección de giro?




Las dos fuerzas que actúan sobre la peonza son:

- Su peso: $M\vec{g}$ actúa hacia abajo
- La normal: $\vec{n}$ actúa hacia arriba en el punto de pivote $O$
  la normal no produce ningún par alrededor del pivote porque su brazo de palanca con respecto a dicho punto es cero

Par con respecto a $O$ debido a la gravedad

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$$

Dirección perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $M\vec{g}$

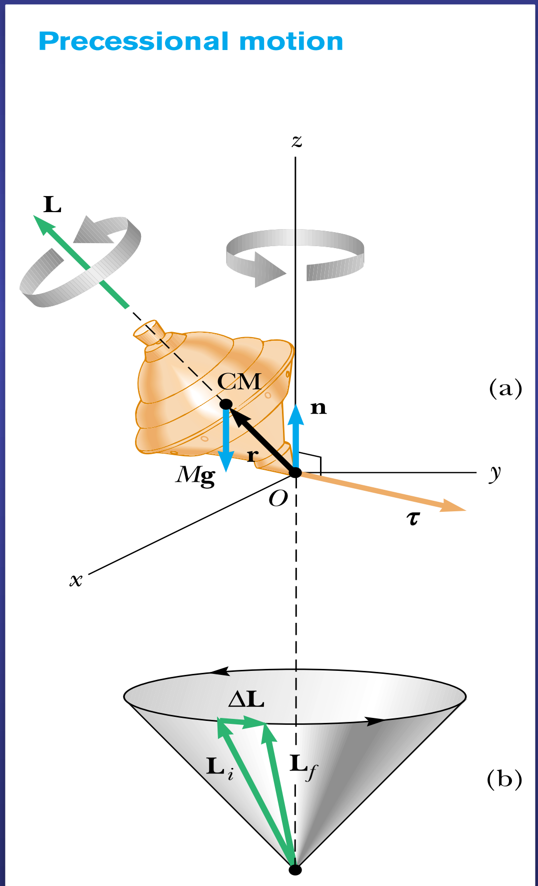
Obligatoriamente el vector $\vec{\tau}$ se encuentra en el plano horizontal (perpendicular al peso) perpendicular al vector momento angular (que lleva la dirección de la posición del centro de masas con respecto a $O$ )

# Movimiento de precesión de los giróscopos
# Origen del movimiento de precesión

**¿Por qué la peonza no mantiene su dirección de giro?**

**El par neto y el momento angular están relacionados por**

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$




**El cambio en el vector momento angular $d\vec{L}$ producido por el par va en la misma dirección del par.**
**Por ello $d\vec{L}$ también tiene que ser perpendicular a $\vec{L}$**

**En un periodo de tiempo determinado $\Delta t$ el cambio en el momento angular es**

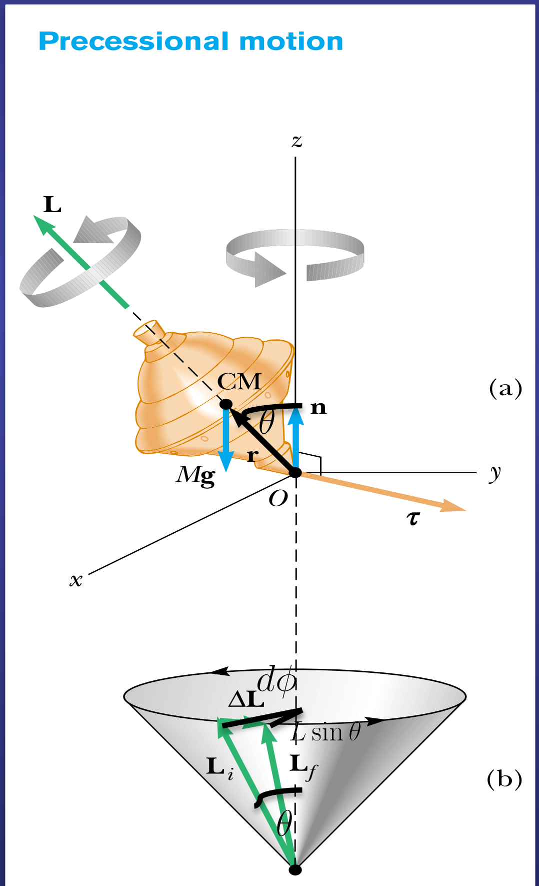
$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = \sum \vec{\tau}\Delta t$$

**Dado que $\Delta\vec{L}$ es perpendicular a $\vec{L}$ el módulo de $\vec{L}$ no cambia**

$$|\vec{L}_i| = |\vec{L}_f|$$

**Lo que cambia es la dirección de $\vec{L}$.**
**Puesto que el cambio en el momento angular $\Delta\vec{L}$ va en la dirección de $\sum \vec{\tau}$ (situado en el plano $xy$), la peonza experimenta un movimiento de precesión**

# Movimiento de precesión de una peonza
# Descripción cuantitativa




**En el intervalo de tiempo $dt$ el vector momento angular rota un ángulo $d\phi$ que es también el ángulo que rota el eje. A partir del triángulo que define $d\phi$ en la figura (b)**

$$|d\vec{L}| = L \sin\theta d\phi$$

**Por otra parte, el módulo del momento del peso viene definido por**

$$|\vec{\tau}| = Mgr \sin\theta$$

**Como**

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow Mgr \sin\theta = L \sin\theta \frac{d\phi}{dt}$$

**Definiendo la velocidad angular de precesión como** $\omega_{\mathrm{p}} = \dfrac{d\phi}{dt}$

$$\omega_{\mathrm{p}} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{rMg}{L} = \frac{rmg}{I\omega}$$

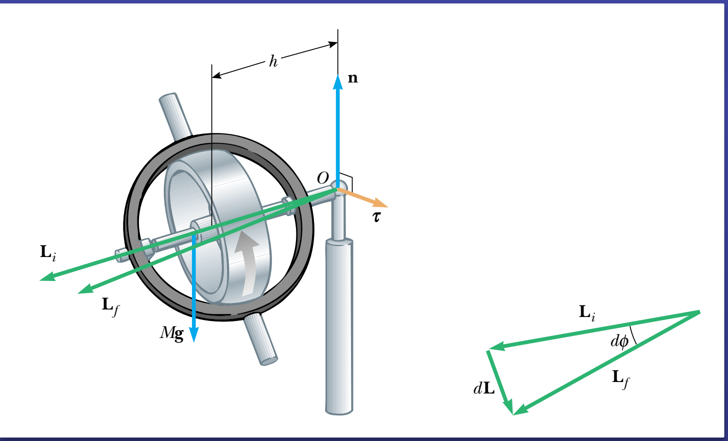
**Independiente del ángulo de inclinación**

**El resultado es válido siempre que $\omega_p << \omega$**

# Movimiento de precesión de los giróscopos
# Descripción cuantitativa

Repitiendo el proceso anterior para el caso de un giróscopo

En el intervalo de tiempo $dt$ el vector momento angular rota un ángulo $d\phi$ que es también el ángulo que rota el eje




Del triángulo formado por los vectores $\vec{L}_i$ , $\vec{L}_f$ , y $d\vec{L}$

$$\sin d\phi \approx d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\tau dt}{L} = \frac{(Mgh)dt}{L}$$

Donde hemos utilizado que para ángulos pequeños $\sin\phi \approx \phi$

Dividiendo entre $dt$ y utilizando la expresión $L = I\omega$

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgh}{I\omega}$$

**A esta velocidad angular se la conoce como frecuancia de precesión. El resultado es válido siempre que $\omega_p << \omega$**