

FISICA GENERAL IV – Curso 2022

Práctica 6. Mecánica Cuántica: Momento Angular, efecto Zeeman, espín, interacción espín-órbita.

- (a) A partir del cálculo de los conmutadores $[L_x, L_y]$, $[L_x, L_z]$ y $[L_y, L_z]$ derive una expresión general para $[L_i, L_j]$ donde $i, j = x, y, z$ ¹.

(b) Calcule los conmutadores de L^2 con L_i , donde $i = x, y, z$.

(c) Dos variables físicas se dicen compatibles si pueden ser especificadas con total precisión simultáneamente. Tales variables son representadas por operadores que conmutan. ¿son compatibles las componentes del momento angular?. Determine la correspondiente relación de incerteza.²
- Suponga que se coloca al átomo de hidrógeno en un campo magnético uniforme B (*Nota: en este ejercicio consideraremos únicamente el momento magnético orbital*).

(a) A partir de la expresión clásica para el momento magnético de una espira de corriente obtenga una expresión para el momento dipolar magnético orbital del electrón en términos de \mathbf{L} . ¿Cuáles son los autovalores correspondientes a la componente z del momento magnético?.

(b) ¿Cuál es la energía que agrega a un electrón ligado la presencia del campo magnético?.

(c) En presencia del campo magnético, ¿en cuántos niveles se desdobra un cierto nivel de energía caracterizado por los números cuánticos nl ? ¿Hay estados que no se vean afectados por la presencia del campo magnético?.

(d) Calcule la diferencia en frecuencia entre las transiciones $p \rightarrow s$ con $\Delta m_l = +1$ y $\Delta m_l = -1$ (recuerde que p hace referencia a estados con $l = 1$ mientras que s denota estados con $l = 0$).
- Demuestre que si un sistema está en un autoestado de J_z , entonces los valores esperados de los operadores J_x y J_y son nulos. (*Hint: Definiendo el operador $J_+ \equiv J_x + iJ_y$ y, a partir del conmutador $[J_+, J_z]$, muestre que la aplicación de J_+ a una autofunción de J_z con autovalor m da como resultado nuevamente una autofunción de J_z pero cuyo autovalor pasa a ser $m + 1$* .)
- Dado que las componentes del operador momento angular no conmutan, no es posible medirlas con exactitud simultáneamente. Muestre que para un sistema en un autoestado de J^2 (con autovalor $\hbar^2 j(j+1)$) y de J_z (con autovalor $\hbar m$) la mayor precisión en la medida de las componentes J_x y J_y se obtiene cuando $|m| = j$.

¹Utilice el tensor completamente antisimétrico ϵ_{ijk} , donde $\epsilon_{ijk} = 0$ si cualquiera de sus índices son iguales y $\epsilon_{ijk} = +1 (-1)$ si los índices i, j, k pueden obtenerse de 1, 2, 3 mediante un número par (impar) de permutaciones. Los índices 1, 2, 3 hacen referencia a las componentes x, y, z de los vectores.

²Dados dos operadores A y B , sus incertezas ΔA y ΔB se definen según:

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

$$\Delta B = \sqrt{\langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2}.$$

La relación de incerteza para A y B viene dada por

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} |\langle C \rangle|,$$

donde $C \equiv -\frac{i}{\hbar}[A, B]$.

5. Utilice las reglas de adición de momentos angulares para determinar los posibles valores del momento angular j y su proyección m_j para un sistema de dos electrones ($j_1 = j_2 = 1/2$). Repita para el caso en que $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$.
6. Es posible representar el espín del electrón de forma matricial definiendo $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$, donde las matrices de Pauli vienen dadas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera la función de onda de una partícula de espín $1/2$ se representa a través de un *espinor* de dos componentes:

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

donde ψ_+ corresponde a $s = 1/2, m_s = +1/2$ y ψ_- a $s = 1/2, m_s = -1/2$. En esta representación entonces S_z y \mathbf{S}^2 vienen dados por las siguientes matrices:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix},$$

mientras que operadores orbitales, como por ejemplo \mathbf{L}^2 , pasan a representarse por matrices diagonales:

$$\mathbf{L}^2 \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{L}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^2 \end{pmatrix}.$$

Utilice esta representación para encontrar las autofunciones de una partícula de espín $1/2$ en un potencial central que sean autofunciones simultáneas de los operadores $\mathbf{L}^2, \mathbf{J}^2$ y J_z , donde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. (**Nota:** Puede resultarle útil el siguiente resultado para los armónicos esféricos $L_+ Y_l^m = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_l^{m+1}$, donde $L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$. **Hint:** Comience separando variables y buscando autofunciones primero para $J_z = L_z + S_z$ y luego recuerde que los armónicos esféricos son autofunciones de \mathbf{L}^2 . Finalmente, encuentre una relación para las partes radiales de ψ_+ y ψ_- a partir de la ecuación de autovalores para \mathbf{J}^2 .)

7. La energía del electrón debida a la interacción espín-órbita es proporcional a $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$. Con los siguientes incisos como guía calcule la separación de dos niveles de energía debida a la interacción espín-órbita.
- (a) Expresé $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ en términos de \mathbf{J}, \mathbf{L} y \mathbf{S} .
- (b) Calcule los autovalores del operador $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ (suponga que las autofunciones de \mathbf{J}^2 lo son también de \mathbf{L}^2 y \mathbf{S}^2).
- (c) Determine los valores posibles de j que resultan de la adición del momento angular orbital y el espín (aplique la regla de adición de momentos angulares suponiendo que el momento angular orbital es l y utilizando el hecho de que $s = 1/2$ para el electrón). Compare con lo obtenido en el ejercicio 6.
- (d) Como habrá notado en el inciso anterior, para cada valor de l hay dos posibles valores de j , de modo que la interacción espín-órbita desdobra el nivel en dos. Calcule la energía correspondiente a cada nivel, usando la siguiente expresión para la energía debida a la interacción espín-órbita:

$$E_{SL} = \frac{|E_n| Z^2 \alpha^2}{\hbar^2 n l (l+1) (l+1/2)} \lambda_{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}},$$

donde $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ es denominada constante de estructura fina y $\lambda_{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}$ los autovalores calculados en el inciso (b). Calcule la separación entre los niveles de energía.

8. Puede demostrarse que el operador asociado a la interacción espín-órbita viene dado por:

$$\frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dE_p}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S},$$

donde E_p es la energía potencial debida a la interacción eléctrica con el núcleo. Partiendo de que E_{SL} puede obtenerse como el valor esperado de dicha interacción³, utilizando el resultado:

$$\langle r^{-3} \rangle = \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 l(l+1/2)(l+1)},$$

y también lo realizado en el ejercicio 6, reobtenga la expresión para el desdoblamiento espín-órbita calculada en el inciso (d) del ejercicio anterior.

³Este resultado proviene de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo que estudiará en detalle en el curso de Mecánica Cuántica I.