

Práctica 1: Relatividad Especial - Transformaciones de Lorentz

1. Sea una partícula de masa m sometida a una fuerza del tipo $F = -k(x - x_0)$. Muestre que las ecuaciones de movimiento son invariantes ante una transformación de Galileo.

2. a) Muestre que la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

no es invariante ante una transformación de Galileo.

b) Muestre que la ecuación de onda es invariante frente a una transformación de Lorentz.

3. Muestre que el intervalo espacio-temporal $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ es invariante ante una transformación de Lorentz.

4. Dos observadores S y S' se mueven con una velocidad relativa \vec{v} a lo largo del eje común $x-x'$. Sincronizan sus relojes en $t = t' = 0$. S observa el evento 1 en $x_1 = cT$ en el instante $t_1 = T$ y el evento 2 en $x_2 = 3cT$ a $t_2 = 1.5T$, donde $T > 0$ es constante. Para el observador S' ambos eventos ocurren simultáneamente en el instante t' . a) Encuentre la velocidad relativa \vec{v} entre ambos observadores. b) Calcule el tiempo t' y la separación espacial entre ambos eventos según S' en función de c y T . c) Determine el intervalo espacio-temporal Δs^2 para cada uno de los sistemas de referencia (S y S'). ¿Se cumple la invarianza de Δs^2 ?

5. Un astronauta está viajando en un vehículo espacial que tiene una velocidad de $0.5c$ en relación a la Tierra. El astronauta mide su propio pulso, obteniendo 75 pulsaciones/min. Las señales correspondientes al pulso del astronauta son enviadas por radio hasta la Tierra mientras el vehículo se mueve en una dirección perpendicular a la línea que conecta la nave con un observador situado sobre la superficie terrestre. a) ¿Qué pulso medirá el observador situado en Tierra?. b) ¿Cuál sería el pulso del astronauta si la velocidad de la nave espacial se incrementa hasta $0.999c$?

6. Sean dos sistemas inerciales S y S' . Respecto de S , el sistema S' se aleja a velocidad v sobre el eje x . a) Suponga una varilla de longitud L_0 fija en el eje x' de S' , ¿Cuál es la longitud de la varilla según S' y S ? b) Si ahora la varilla está fija en el eje x del sistema S , ¿Cuál es la longitud de la varilla según S' y S ? c) Grafique ambas situaciones desde el punto de vista de S en dos diagramas ct vs x y verifique que se obtienen las mismas conclusiones derivadas de los cálculos analíticos hechos en a) y b).

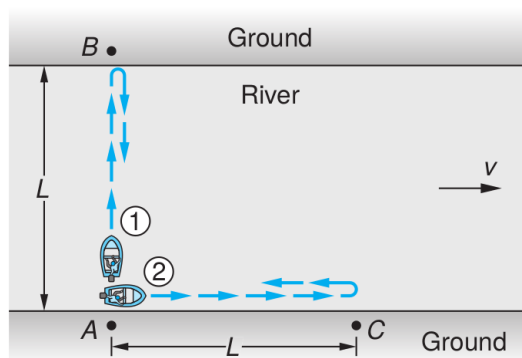
7. En la cima de una montaña a 2000 m de altura se observaron un promedio de 568 muones. En mediciones de laboratorio se determinó que la vida media de los muones (τ) es de $2.2\ \mu\text{s}$. Si el número de muones a un dado tiempo t está determinado por $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$, obtenga el número de muones que se observaría a nivel del mar si éstos viajan a una velocidad de $0.994c$. Se realizó dicha medición dando como resultado aproximadamente 407 muones. Determine a qué vida media corresponde esta medición y muestre que dicho valor es consistente con las predicciones de la teoría de la relatividad.

8. Dos naves espaciales se aproximan desde posiciones opuestas en un sistema inercial. Si la velocidad de cada una de ellas es de $0.9c$, calcule la velocidad relativa entre las naves. (*Hint: sitúe su sistema de referencia sobre una de las naves*).

9. Suponga que una partícula se mueve respecto a un observador O' con velocidad constante $c/2$ en el plano $x'y'$ en una trayectoria que forma un ángulo de 60° con el eje x' . Si la velocidad relativa de O' respecto a un observador O es $0.6c$ a lo largo del eje común $x - x'$, encuentre la velocidad de la partícula y el ángulo respecto al eje x determinados por O .
10. Un observador O en reposo ubicado en x_1 tira una piedra con velocidad v (medida desde O) contra un vidrio ubicado en x_2 . ¿Existe un sistema de referencia inercial en movimiento O' para el cual la piedra impacte antes de ser lanzada por O ? Justifique su respuesta.¹

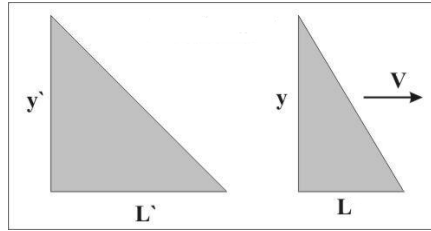
Problemas auxiliares (A) y de repaso (R)

- A1. a) Dos remeros igualmente hábiles corren una carrera sobre un río correntoso como se muestra en la Figura. Cada uno de ellos rema a una velocidad c en agua en calma, mientras que la corriente del río tiene velocidad v . El bote 1 va desde A a B recorriendo una distancia L y vuelve, mientras que el bote 2 recorre la misma distancia desde A hacia C y regresa. Suponiendo $c > v$, ¿Qué bote ganará la carrera? ¿Por cuánto tiempo superará el bote ganador al perdedor si la lectura de tiempos permite medir diferencias con una precisión de orden v^2/c^2 ?
- b) Estableciendo una analogía con el experimento de Michelson-Morley, ¿Qué significado tiene la diferencia de tiempos que calculó en el inciso anterior? ¿Qué representan las velocidades c , v y su composición? ¿Qué efecto se observa debido a la diferencia de tiempos calculada al rotar 90 grados el interferómetro? Cuantifique el efecto en el caso en que $L = 11$ m, $v = 10^{-4}c$ y $\lambda = 5.5 \times 10^{-7}$ m (luz verde).



- R1. El sistema O' posee una velocidad de $0.6c$ con relación a O . Se ajustan los relojes de manera que a $t = t'$ en $x = x' = 0$. Dos sucesos tienen lugar. El suceso 1 tiene lugar en $x_1 = 10m$, $t_1 = 2 \times 10^{-7}s$. El suceso 2 tiene lugar en $x_2 = 50m$, $t_2 = 3 \times 10^{-7}s$. Determine la distancia y la diferencia de tiempos entre los sucesos medidos en O' .
- R2. ¿A qué velocidad debe moverse una regla de 1 m en relación a un cierto observador, si éste mide que su longitud es igual a 0.5 m?
- R3. Una nave espacial con forma de triángulo pasa volando junto a un observador situado en la Tierra, con una velocidad de $0.9c$ a lo largo de la dirección x . Un observador situado en la nave espacial mide $L' = 52$ m e $y' = 25$ m. ¿Qué dimensiones de la nave medirá un observador situado en la Tierra, cuando la nave se mueve en la dirección mostrada en la Figura?.

¹Esto significa que si un fenómeno es causal no existe un sistema de referencia en el cual el orden de los sucesos esté invertido.



- R4. Considere una partícula cuya vida media es de 2×10^{-6} s. ¿Cuál será la vida media respecto a un observador que ve la partícula moverse con una velocidad $v = 0.9c$?
- R5. ¿Cuál debe ser la velocidad relativa de dos observadores inerciales para que sus medidas de intervalos de tiempo difieran en 1%?
- R6. Una nave espacial que se dirige hacia la luna pasa la tierra con una velocidad relativa de $0.8c$.
a) ¿Qué tiempo demora el viaje de la tierra a la luna de acuerdo a un observador terrestre? **b)** ¿Cuál es la distancia tierra-luna de acuerdo a un pasajero de la nave? ¿Qué tiempo demora el viaje de acuerdo con el pasajero?.
- A2. Sean dos observadores inerciales O y O' . Verifique que las transformaciones de velocidades son compatibles con la suposición de que la velocidad de la luz es la misma para ambos observadores considerando un rayo de luz que se mueve a lo largo **a)** del eje y con respecto a O , **b)** del eje y' con respecto a O' . **c)** Calcule el ángulo con el que se propaga la luz respecto al eje x según O y el ángulo con respecto al eje x' medido por O' . ¿Coinciden?.
- A3. Demostrar que la transformación general de Lorentz cuando los ejes de coordenadas utilizados por observadores O y O' no son paralelos a la velocidad relativa viene dada por:

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{v^2} - \gamma \vec{v} t$$

$$t' = \gamma(t - \vec{r} \cdot \vec{v} / c^2)$$

(Hint: Descomponga los vectores \vec{r} y \vec{r}' en componentes paralelas y perpendiculares a \vec{v}).