Física General II

Trabajo Práctico 2: Gravitación (II)

1. Explicar por qué la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra no realiza trabajo sobre un satélite que se mueve alrededor de ésta en una órbita circular. ¿Qué ocurre en el caso de una órbita elíptica? ¿Se ven modificadas la energía cinética, la energía potencial y/o la energía mecánica a lo largo de la órbita?

2. El radio orbital medio de Marte, de acuerdo con la Tabla I de la Práctica 1, es de 2.28×10^{11} m.

   (a) Calcular la duración del año marciano, y comparar con el valor consignado en la tabla.

   (b) Teniendo en cuenta la excentricidad de la órbita marciana consignada en la tabla, calcular la distancia de máximo acercamiento al Sol (perihelio) y la de máximo alejamiento (afelio).

3. El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol, acercándose a una distancia mínima de 0.57 UA cada 75.3 años. Calcular la distancia de máximo alejamiento del cometa respecto del Sol y la excentricidad de la órbita.

4. Un satélite de la Tierra tiene tiene un perigeo de 300 km y un apogeo de 3500 km por sobre la superficie terrestre. ¿A qué distancia de nuestro planeta se encuentra cuando ha rotado 90° alrededor de la Tierra desde el perigeo?

5. El satélite artificial más antiguo que permanece en órbita es el Vanguard I, lanzado el 17 de marzo de 1958. Su masa es de sólo 1.47 kg. En su órbita inicial, la distancia a la superficie terrestre en el perigeo era de 650 km (esta distancia casi no ha variado en la actualidad) y su rapidez en ese punto respecto de la Tierra era de 8.23 km/s. Calcular el momento angular del satélite respecto del centro de la Tierra, su energía mecánica, el semieje mayor de su órbita, y su período orbital.

6. Dos cuerpos 1 y 2 de masas respectivas m y M, con $m \ll M$, se atraen entre sí debido a la interacción gravitatoria. En el marco en que el cuerpo 2 está en reposo, la energía del sistema es E y el momento angular del cuerpo 1 respecto del centro de masa del cuerpo 2 es $\vec{L}$.

   (a) A partir del análisis del potencial efectivo, mostrar que en ausencia de otras fuerzas la distancia mínima entre los cuerpos viene dada por $r_{\text{mín}} = k(\varepsilon - 1)/(2E)$, donde $k = GmM$ y $\varepsilon = [1 + 2EL^2/(mk^2)]^{1/2}$ (excentricidad de la órbita descripta por el cuerpo 1 alrededor del cuerpo 2). Considerar en particular el caso $L = 0$.

   (b) Mostrar que la relación anterior es equivalente a $r_{\text{mín}} = p/(1 + \varepsilon)$, donde $p = L^2/(mk)$.

7. (a) Calcular la excentricidad que debe tener una órbita de Hohmann que lleve a cabo la transferencia descripta en el problema 8 de la Práctica 1.

   (b) Despreciando los posibles cambios en la masa de la nave debidos a la propulsión, calcular cuánto debe incrementarse la velocidad al pasar de la órbita inicial a la órbita de transferencia, y de la órbita de transferencia a la órbita final.

   (c) Determinar los incrementos en la energía cinética en ambas propulsiones, y comparar con el cambio en la energía mecánica obtenido en el problema 8 de la Práctica 1. ¿Qué relación debe haber entre estas cantidades?

8. Dos cuerpos de masas m y $2m$ están separados por una distancia a.

   (a) Encontrar los puntos en donde el campo gravitatorio resultante es cero y en donde los dos cuerpos producen campos gravitatorios iguales en módulo y dirección.

   (b) Calcular el campo gravitatorio en el centro de masa de los dos cuerpos.

9. Considerar un hipotético planeta de densidad uniforme, cuya masa es M y su radio R. Si desde la superficie se hiciera un pozo hacia el centro del planeta, ¿qué fuerza gravitatoria sentiría un cuerpo de masa m introducido en el pozo hasta una profundidad $R/3$?.

10. (a) Dos estrellas de masas M y m, separadas una distancia d, describen órbitas circulares en torno al centro de masa del sistema. Probar que el período de cada estrella es $T = 2\pi\sqrt{d^3/[(M+m)G]}$.

    (b) Resolver el problema 12 de la Práctica 1 reduciéndolo a un problema de un cuerpo de "masa reducida" μ.

Problemas adicionales:

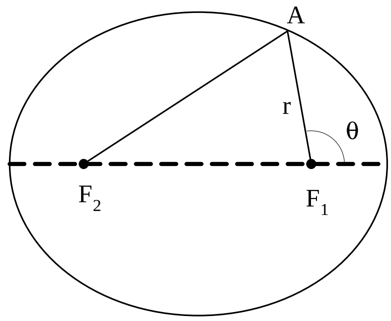
11. Si n es el cociente entre la máxima y la mínima velocidad de un planeta respecto del Sol, probar que la excentricidad de su órbita viene dada por $\varepsilon = (n-1)/(n+1)$.

12. Una nave espacial se acerca a Marte describiendo una órbita parabólica bajo la influencia de la fuerza gravitacional del planeta. La distancia de mayor proximidad a la superficie marciana en esa trayectoria es de 300 km. Al llegar a este punto, se encienden propulsores que frenan la nave espacial de modo tal de colocarla en una órbita circular a 300 km de altitud sobre la superficie.

    (a) ¿En qué porcentaje debe reducirse la rapidez de la nave para que esto sea posible?

    (b) ¿Qué ocurriría si la rapidez se redujera menos, o si se redujera más? ¿Y si la rapidez se incrementara en lugar de reducirse?

13. Dada una elipse por su ecuación en coordenadas polares (ver figura) $r = p/(1 + \varepsilon\cos\theta)$, probar que la suma de las distancias a los focos es constante para todos los puntos de la curva. Calcular el valor de esta constante en términos de p y ε. (Ayuda: determinar r máximo y mínimo; luego considerar el triángulo AF_1F_2, y usar el teorema del coseno.)



14. Una nave es enviada desde la Tierra hasta Marte utilizando una órbita de trasferencia de Hohmann.

    (a) ¿Cuánto tiempo dura la transferencia?

    (b) ¿Cuántos grados tiene que estar Marte adelantado o atrasado respecto de la Tierra cuando la nave inicia su viaje? Aproximar las órbitas de la Tierra y Marte alrededor del Sol como circulares.

15. Un satélite de la Tierra se mueve en una órbita elíptica de excentricidad ε y semieje mayor a. Probar que la máxima velocidad *radial* del satélite viene dada por $v_r = \sqrt{GM_\oplus \varepsilon^2/[a(1-\varepsilon^2)]}$.

16. (Optativo) (a) Probar que la ecuación $r = p/(1+\varepsilon\cos\theta)$, con $0 < \varepsilon < 1$ puede llevarse en coordenadas cartesianas a la forma "tradicional" de la ecuación de una elipse, $(x-x_0)^2/a^2 + (y-y_0)^2/b^2 = 1$, donde $a = p/(1-\varepsilon^2)$ y $b = p/\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

    (b) Proceder en forma similar para el caso de $\varepsilon = 0$ (circunferencia), $\varepsilon = 1$ (parábola) y $\varepsilon > 1$ (una rama de una hipérbola).

- Recomendamos leer la nota "Mareas terrestres de origen solar", disponible en la página web de la materia.

17. (Optativo) (a) El efecto que produce la Luna en la presencia de mareas en la Tierra es mayor que el que produce el Sol. ¿Cómo puede explicarse esto teniendo en cuenta el resultado del problema 1 de la Práctica 1?

    (b) Mucho tiempo antes de Newton, se había especulado con que la Luna fuera responsable de la presencia de las mareas terrestres. Sin embargo, se desechó esta posibilidad argumentando que en ese caso debería existir una pleamar al día (cuando la superficie del lugar está más próxima a la Luna), mientras que las pleamares observadas diariamente son dos. Newton mostró que este razonamiento era incorrecto. Determinar cuál es el error, y explicar el fenómeno usando la Ley de Gravitación Universal.

Algunos resultados: 2b) $r_{\text{máx}} = 2.49 \times 10^{11}$ m, $r_{\text{mín}} = 2.07 \times 10^{11}$ m; 3a) $r_{\text{máx}} = 35.0$ UA; 3b) $\varepsilon = 0.968$; 4) $d = 1590$ km; 5) $L = 8.49 \times 10^{10}$ kg m^2/s, $E_{\text{mec}} = -3.36 \times 10^7$ J, $a = 8720$ km, $T = 2$ h 15 min; 7a) $\varepsilon = 0.2$; 7b) $\Delta v_A = 534$ m/s, $\Delta v_B = 482$ m/s; 8b) $\mathcal{G} = 63\, Gm/(4a^2)$; 9) $\vec{F} = -2GmM/(3R^2)\,\check{r}$; 12a) en un 29.3%; 14a) 259 días; 14b) 44.1° adelantado.