⊕ Desarrollo histórico

⊕ Se intentó describir el movimiento de estrellas y planetos desde un SISTEMA de referencia ubicado en la tierra

- Ptolomeo (140 dc)

Sol y Estrellas: orbita circulares simples
Planetos: orbitas más complejas (Epiciclos)

¡duró 1400 años!

- Copérnico (1543 dc)

Sol y Estrellas: Fijos en el universo
Planetos: orbitas circulares alrededor del Sol
- Este modelo tuvo como principal opositor a la Iglesia por sacar la tierra del centro del universo

Todo andaba mas o menos bien para la Exactitud y precisión de las medidas de la Epoca.

Tycho Brahe (1546 - 1601) 55 años
Mediciones MUY PRECISAS para la Epoca
Se murió joven y su colaborador se quedo estudiando los Datos

Johanes Kepler (1571 - 1630) 59 años

Utilizando los datos de Brahe y luego de muchos años de análisis pudo formular tres leyes

Ley 1: Todos los planetas se mueven en orbitas elípticas, con el sol en uno de los focos.

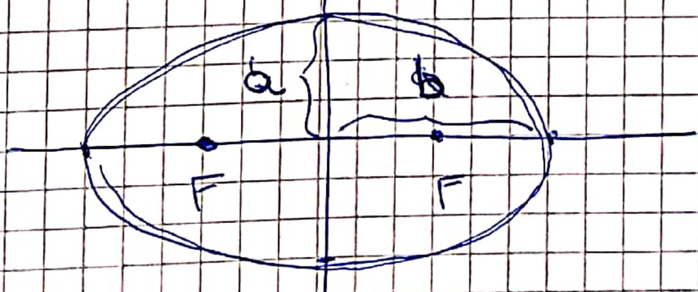
1609

Ley 2: La recta que une cualquier planeta con el sol, barre areas iguales en tiempos iguales

1618

Ley 3: El cuadrado del período de cualquier planeta es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol.

$\bar{D} = \frac{(b+F)+(b-F)}{2} = b$ $\quad e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ excentricidad $0 < e < 1$



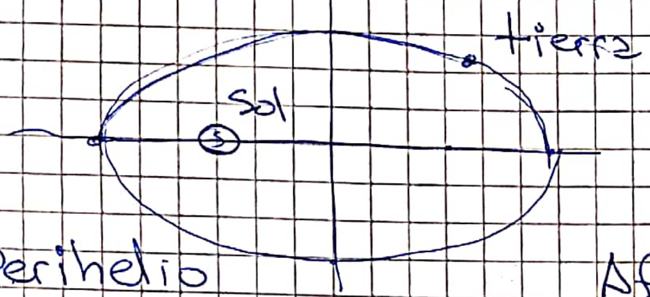
b = Semieje mayor

a = Semieje menor

F = focos

Si los focos coinciden, se trata de una circunsferencia

La distancia media al sol coincide con b



$b = 149,6 \times 10^6$ km

Perihelio $147,2 \times 10^6$ km

Afelio $152,1 \times 10^6$ km

la segunda ley dice que el planeta se mueve más rápido cuando está más cerca del sol.

Kepler intentó eplicar esto pensando en fuerzas perpendiculares a la recta que une el sol con el planeta (Fracasó)

Isaac Newton: (1643-1727) 84 años

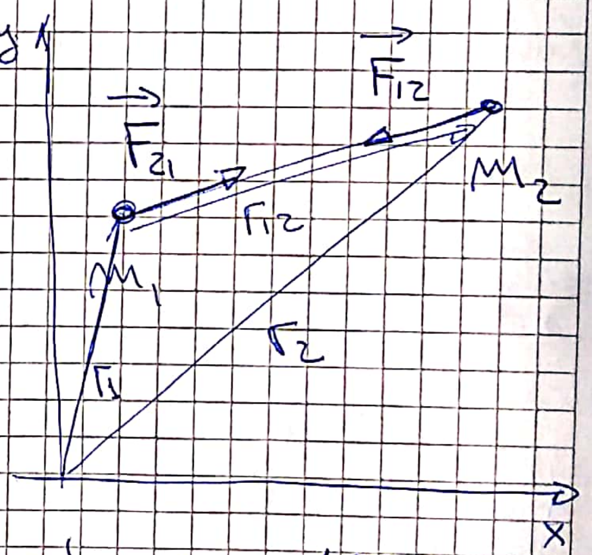
en 1665 la peste provoca el cierre de cambridge
Newton se va al campo y empieza su producción:

- Principio de 1665: Método para aproximar series y regla para reducir cualquier potencia de un binomio en una serie [binomio de Newton y serie binomial]
- Mediados de 1665: Método de las tangentes de Gregory y Schesius [formula de interpolación de Newton]

fines de 1665: cálculo diferencial (Análisis I)
Inicio de 1666: Teoría de los colores {descomposición de luz blanca con un prisma]
Mediados de 1666: calculo Integral (Análisis I y II)
fines de 1666: Empezó a pensar en las fuerzas que mantienen a la luna en orbita y concluyó que tenía que variar inversamente al cuadrado de la distancia.
Todo esto entre los 23 y 24 años!!

$$\vec{F}_{12} = -\frac{G\, m_1 m_2}{r_{12}^2}\, \check{r}_{12}$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11}\ N \frac{m^2}{kg^2}$$

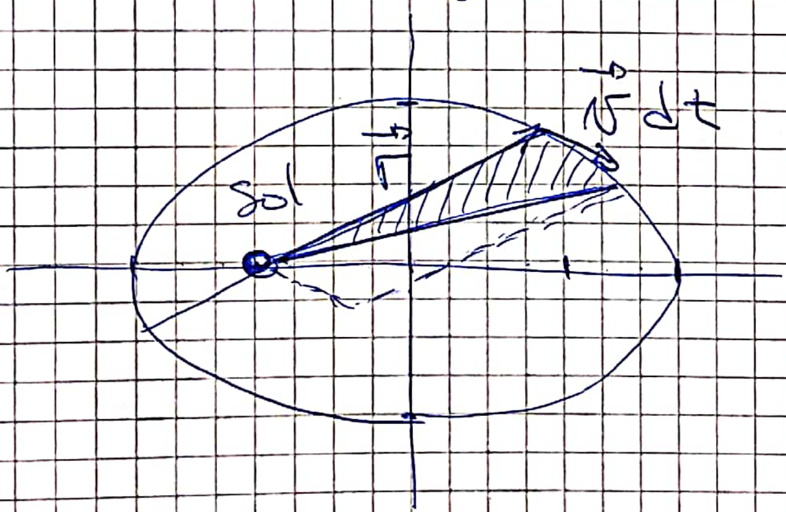


Esta expresión fue publicada en 1686, y junto con la mecánica (desarrollada por Newton) permiten deducir las leyes de Kepler
- La misma fuerza que hace "caer" la manzana, es la responsable de mantener a la luna en orbita (en torno a la tierra) y a los planetas (en torno al sol)

Es muy pequeña y solo se manifiesta en el caso de que 1 o las 2 masas sean MUY grandes

En la vida cotidiana, solo "sentimos" la atracción con la tierra, no entre nosotros.

Si describimos el movimiento desde un sistema de referencia ubicado en el centro del cuerpo de masa mayor, vemos que F_G es una Fza central y No produce Torque, dejando invariante el momento angular $\vec{L} = cte$ (orbita PLANA)



$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\,dt\right|$$

$$d\vec{A} = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\vec{v}\,dt\right|$$

$$|d\vec{A}| = \underbrace{\frac{1}{2m}|\vec{L}|}_{cte}\,dt$$

El area barrida es proporcional al tiempo y esto es la 2° ley de Kepler

Supongamos una orbita circular, la vel angular es constante y solamente hay aceleración centripeta.

La 2º ley de Newton dice

$$\vec{F} = m.\vec{a} = m\vec{a}_c$$

Si la Fza es la gravedad

$$\frac{GM\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\omega^2 r$$

como el movimiento es uniforme $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{GM}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} \cdot r^3$$

que es la tercera ley de Kepler.

Se puede generalizar para una elipse pero ya no es tan elegante....

En 1798 (más de 100 años despues) Henry Cavendish realizo una determinación de G

Equivalencia entre masa Gravitatoria y masa inercial

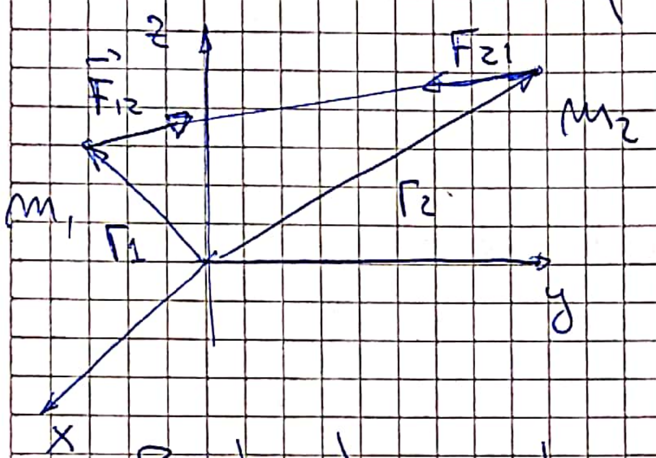
$$\frac{GM_T m_g}{r^2} = m_I . a \Rightarrow a = \frac{GM_T}{r^2}\left(\frac{m_g}{m_I}\right)$$

Se cumple si todos los cuerpos tienen la misma aceleración

Gravitación

esto va antes

Problema de 2 cuerpos



$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \qquad \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

Restando ambas ecuaciones

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

3° ley de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12} \Rightarrow \vec{F}_{12} = \mu \, \vec{a}_{1,2}$$

masa Reducida

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Si $m_1 \gg m_2$ $\quad \mu = \dfrac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \approx m_2$

Todo se reduce a estudiar el movimiento relativo de una partícula respecto a la otra

en el caso del sol y la tierra o tierra y luna

Más aun en el caso de satélites artificiales

Apartir de ahora estudiamos 1 solo cuerpo

Energía Potencial Gravitatoria

Recordando la definición de TRABAJO

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{o bien} \quad W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si $\vec{F}$ es conservativa $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ entonces tiene una energía potencial asociada, dada por

$$U(r) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int -\frac{GMm}{r^2}\, dr$$

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \longrightarrow \text{diverge en } r=0$$

es cero para $r = \infty$

Esta expresión sirve para calcular el TRABAJO como cambio de la energía potencial

$$W = -\Delta U$$

$$W_{12} = -\Delta U = -\left[U(r_2) - U(r_1)\right] = U(r_1) - U(r_2)$$

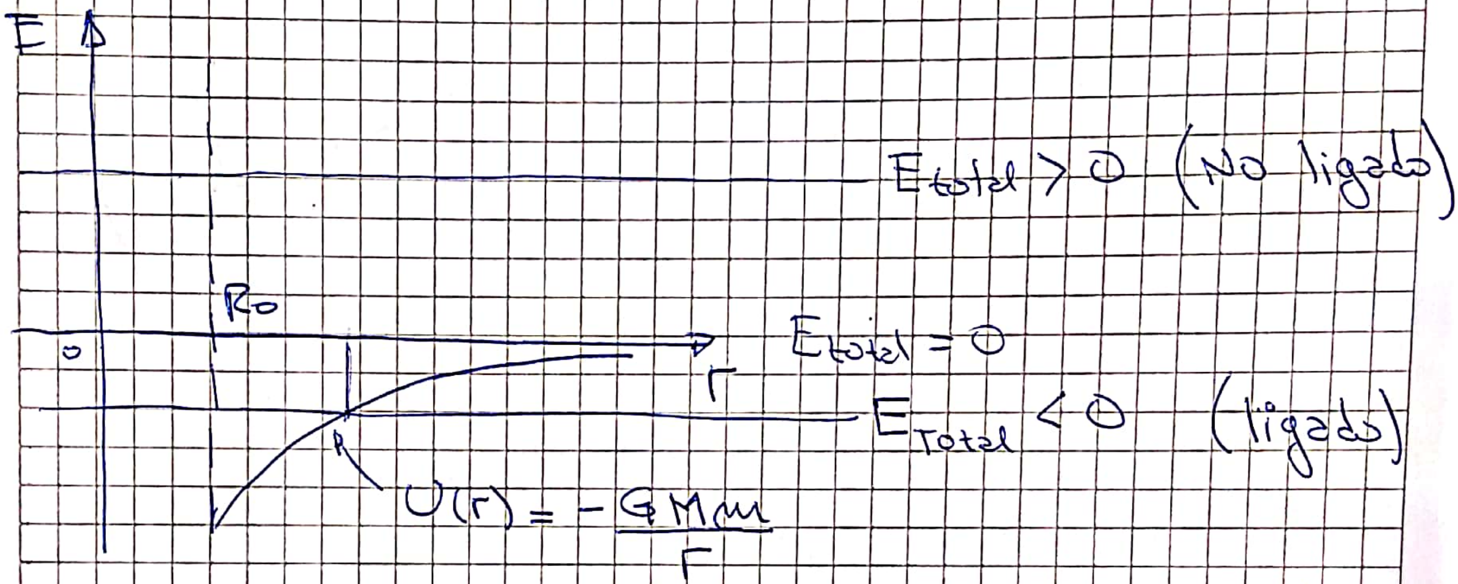
Por otro lado $W_{12} = \Delta E_k$ SIEMPRE!

$$\Delta E_k = -\Delta U \Rightarrow \Delta E_k + \Delta U = 0$$

$$E_k^{(2)} - E_k^{(1)} + U(r_2) - U(r_1) = 0$$

$$\left[E_k^{(2)} + U(r_2)\right] - \left[E_k^{(1)} + U(r_1)\right] = 0$$

independientemente de cuales sean los puntos 1 y 2 con esta definición de energía potencial, podemos ver las distintas clases de movimiento



la E_k (energía cinética) es siempre positiva.

Se define la velocidad de escape como la velocidad necesaria para llegar hasta el ∞. En este caso si llega justo con $v=0$, la energía cinética es cero y $U(r)=0$, de modo que

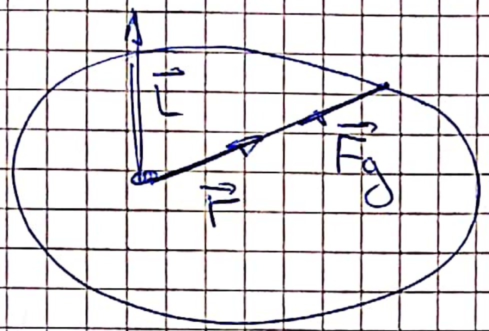
$$E^i = E^f = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GMm}{R_T} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = \frac{GM_T \cancel{m}}{R_T}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

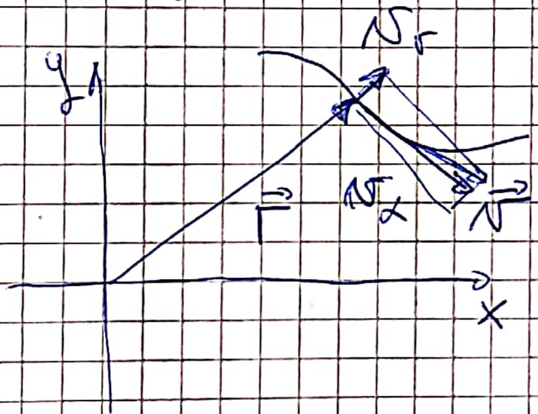
Estamos en condiciones de demostrar la Primera ley de Kepler (las orbitas son elípticas)



Como F_g es central

$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$

Supongamos una trayectoria arbitraria



v_r = velocidad radial

v_α = velocidad $\perp$ a $\vec{r}$

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\alpha = r \cdot \omega = r\frac{d\alpha}{dt}$$

Si la partícula tiene una energía E_m

$$E_m = E_c + E_p = cte$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m (v_\alpha^2 + v_r^2) - \frac{GMm}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{GMm}{r}$$

despejamos v_r

$$v_r^2 = \frac{2E_m}{m} - \omega^2 r^2 + \frac{2GM}{r}$$

$cte = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

el módulo también es constante

$L = m \cdot r \underbrace{v \operatorname{sen}\theta}_{v_\alpha}$ $\quad \theta$ angulo e/ $\vec{r}$ y $\vec{v}$

$L = m r v_\alpha = m r (r\omega) = m r^2 \omega$

de donde $\omega r = \frac{L}{m r}$, que reemplazando

$$v_r^2 = \frac{2E_m}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} + \frac{2GM}{r}$$

Ahora usamos la regla de la cadena

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dr}{dt}} = \omega \cdot \frac{1}{v_r}$$

$$d\alpha = \frac{\omega}{v_r} dr = \frac{\frac{L}{mr^2}}{v_r} dr$$

$$d\alpha = \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2E_m}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} + \frac{2GM}{r}}} dr$$

reacomodando y dividiendo por L/m

$$d\alpha = \frac{\frac{1}{r^2}}{\sqrt{\frac{2mE_m}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GMm^2}{L^2 r}}} dr$$

llamando

$$A = -1 \qquad B = -\frac{2GMm^2}{L^2} \qquad C = \frac{2mE_m}{L^2}$$

la ecuación se escribe como

$$d\alpha = \frac{1/r^2}{\sqrt{A\frac{1}{r^2} - B\frac{1}{r} + C}}\, dr$$

haciendo la sustitución

$$U = -\frac{1}{r} \qquad dU = \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$U^2 = \frac{1}{r^2}$$

$$d\alpha = \frac{dU}{\sqrt{AU^2 + BU + C}}.$$

Si $A < 0$

$$\alpha = \int \frac{dU}{\sqrt{AU^2+BU+C}} = -\frac{1}{\sqrt{-A}} \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{2AU+B}{\sqrt{B^2-4AC}}\right)$$

$$\alpha = -\operatorname{arcsen}\left(\frac{-2U+B}{\sqrt{B^2-4C}}\right)$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = \frac{-2U+B}{\sqrt{B^2-4C}} \Rightarrow -\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{2}{r}+B}{\sqrt{B^2-4C}}$$

$$r = \frac{2}{-B - \sqrt{B^2-4C} \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \frac{2/B}{1 - \sqrt{1-\frac{4C}{B^2}} \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$

finalmente llegamos

$$r(\alpha) = \frac{2/B}{1 - \sqrt{1 - \frac{4C}{B^2}} \cdot \operatorname{sen} \alpha}$$

que no es otra cosa que la ecuación de una cónica en coordenadas polares

$$r(\alpha) = \frac{e.f}{1 - e \operatorname{sen} \alpha}$$ donde e = exentric.

f = dist. focal

en nuestro caso

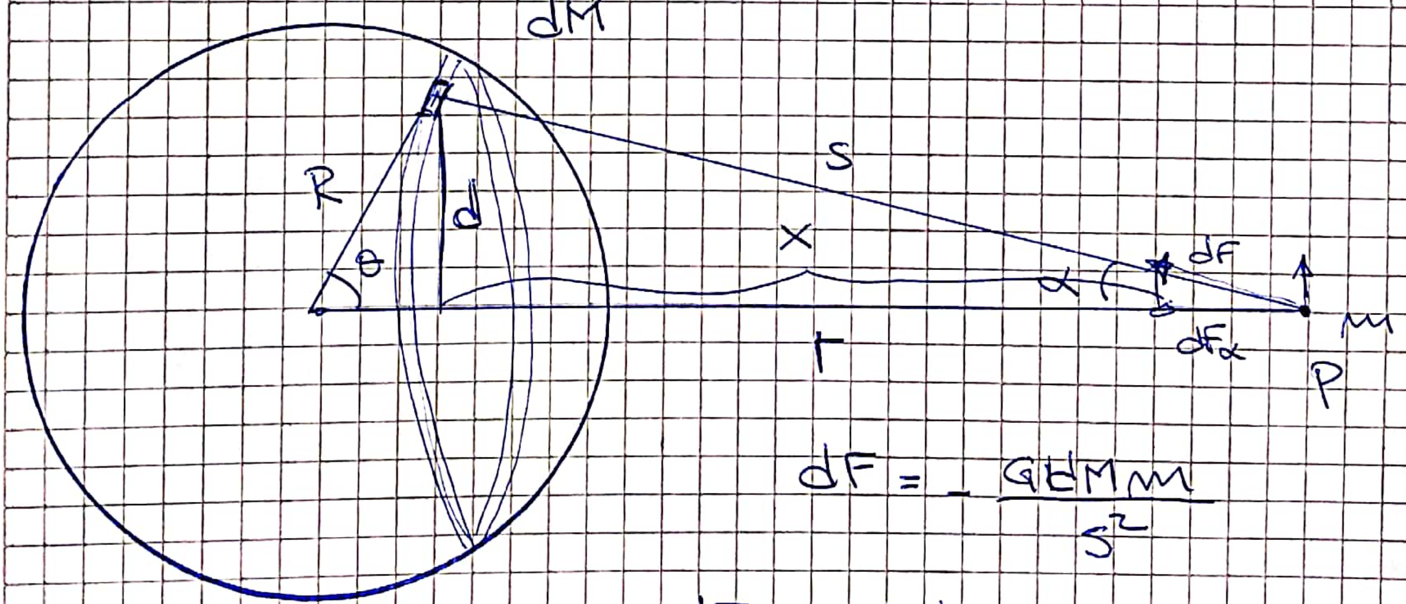
$$\frac{2}{B} = e.f \qquad e = \sqrt{1 - \frac{4C}{B^2}}$$

$$f = \frac{2}{eB} = \frac{2}{B\sqrt{1 - \frac{4C}{B^2}}}$$

Esto es la ecuación de una elipse en coordenadas polares, donde la excentricidad depende de B y C'.

Vamos a demostrar que SIEMPRE se puede considerar a la masa concentrada en el centro de masas.

Vamos a ir calculando por partes, primero un cascarón esférico que descompondremos en anillos



$$dF = -\frac{G\,dM\,m}{s^2}$$

$$dF_\alpha = -\frac{G\,dM\,m}{s^2}\cdot\cos\alpha$$

Se obtiene la F sumando sobre todos los elementos del anillo y luego sobre la esfera

$$F_\alpha = \int -\frac{G\,dM\,m}{s^2}\cdot\cos\alpha = -\frac{Gm\cos\alpha}{s^2}\int dM$$

Veamos la forma de dM

$dM = \delta \cdot dA$ $\quad \delta$ = densidad superficial
dA = elemento de superficie

$\delta = \frac{M}{4\pi R^2}$ $\quad dA = 2\pi \underbrace{d}_{R\,\text{sen}\,\theta} \cdot d\theta R$

$dA = 2\pi R^2 \,\text{sen}\,\theta\, d\theta$

$dM = \frac{M \cancel{2}\cancel{\pi} \cancel{R^2}}{2 \cancel{4}\cancel{\pi} \cancel{R^2}} \text{sen}\,\theta\, d\theta = \frac{M}{2} \text{sen}\,\theta\, d\theta$

Escribiendo el dF nos queda (que es F_x)

$dF = -\frac{GMm \,\text{sen}\,\theta\, d\theta}{2S^2} \cdot \cos\alpha$ (anillo)

usando el teorema del coseno para el angulo θ tenemos

$S^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta$

diferenciando

$\cancel{2}S\,dS = +\cancel{2}rR \,\text{sen}\,\theta\, d\theta$

$\frac{S}{r \cdot R} dS = \text{sen}\,\theta\, d\theta$

Ahora usando el teorema del coseno para el angulo α

$R^2 = r^2 + S^2 - 2rS\cos\alpha$

$R^2 - r^2 - S^2 = -2rS\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{S^2 + r^2 - R^2}{2S \cdot r}$

Si reemplazamos en la expresión de dF

$$dF_{(anillo)} = -\frac{GMm}{2s^2} \cdot \left(\frac{s \cdot ds}{r \cdot R}\right) \cdot \left(\frac{s^2+r^2-R^2}{2r \cdot s}\right)$$

$$dF = -\frac{GMm}{4}\left(\frac{s^2+r^2-R^2}{r^2 R s^2}\right) ds$$

$$dF = -\frac{GMm}{4r^2R}\left(1 + \frac{r^2-R^2}{s^2}\right) ds$$

Se obtiene la fuerza total integrando desde $s = r - R$ $(\theta = 0)$ y $s = r + R$ $(\theta = 180)$

$$F = -\frac{GMm}{4r^2R}\int_{r-R}^{r+R}\left(1 + \frac{r^2-R^2}{s^2}\right) ds$$

$$F = -\frac{GMm}{4r^2R}\underbrace{\left(s - \frac{r^2-R^2}{s}\right)\Bigg|_{r-R}^{r+R}}_{4R}$$

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

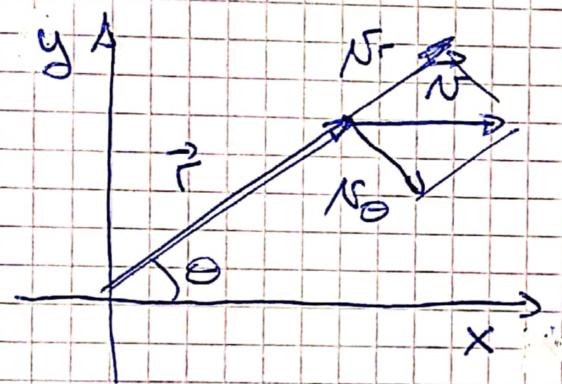
Si el punto está dentro de la corteza, la integral se hace entre $R-r$ y $R+r$ y da CERO!

Potencial Efectivo

La energía viene dado por

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

Si descomponemos la velocidad en una componente radial y otra perpendicular



$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$$

reescribiendo la energía

$$E_m = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GMm}{r}$$

Además sabemos que $\vec{L} = cte \Rightarrow |\vec{L}| = cte$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{v} \cdot m \Rightarrow L = m r \underbrace{v \operatorname{sen}\theta}_{v_\theta}$$

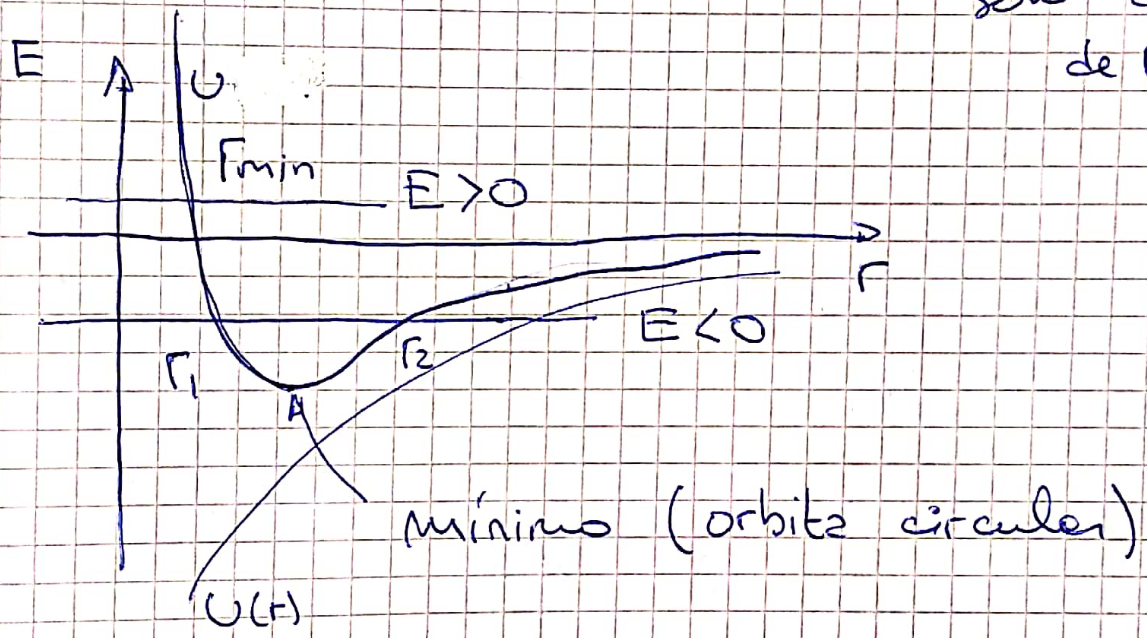
$$L = m r v_\theta \Rightarrow v_\theta = \frac{L}{mr}$$

Reemplazando en E

$$E_m = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{1}{2} \cancel{m} \left(\frac{L^2}{m^{\cancel{2}} r^2} \right) - \frac{GMm}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_r^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}}_{U_{eff}(r)}$$

solo depende de r



Si $E>0$ hay un r_{min} (orbita hiperbólica)

Si $E=0$ También hay r_{min} (orbita Parabólica)

Si $E<0$ hay r_{min} (Perigeo) y $r_{máx}$ (apogeo)