Nota adicional: Mareas terrestres de origen solar

Consideremos que en su movimiento alrededor del Sol la Tierra describe una circunferencia (en lugar de una elipse), y que el centro de masa del sistema Tierra−Sol está en el centro del Sol. La primera aproximación es mejor que el 2%, y la segunda mejor que 30 partes por millón. Utilizaremos un sistema de coordenadas con origen en el centro del Sol, modelando a la Tierra como una esfera maciza homogénea. De acuerdo con la segunda aproximación mencionada, el sistema de referencia que utilizamos es inercial.

El módulo de la fuerza gravitatoria $\vec{F}_{\text{TS}}$ que ejerce el Sol sobre la Tierra (y que es igual al de la fuerza que ejerce la Tierra sobre el Sol, de acuerdo con la tercera ley de Newton) viene dado por

$$F_{\text{TS}} \;=\; \frac{GM_{\oplus}M_{\odot}}{r_{\text{TS}}^2} \;, \tag{1}$$

donde $M_{\oplus} = 5.97{\times}10^{24}$ kg y $M_{\odot} = 1.99{\times}10^{30}$ kg son las masas de la Tierra y el Sol respectivamente, y $r_{\text{TS}} = 1.5 \times 10^{11}$ m es la distancia del centro de la Tierra al centro del Sol. En la Fig. 1, que obviamente no está a escala, se representa a la esfera terrestre y al Sol, éste modelado como partícula (no es necesario considerar las dimensiones del Sol para nuestro análisis).

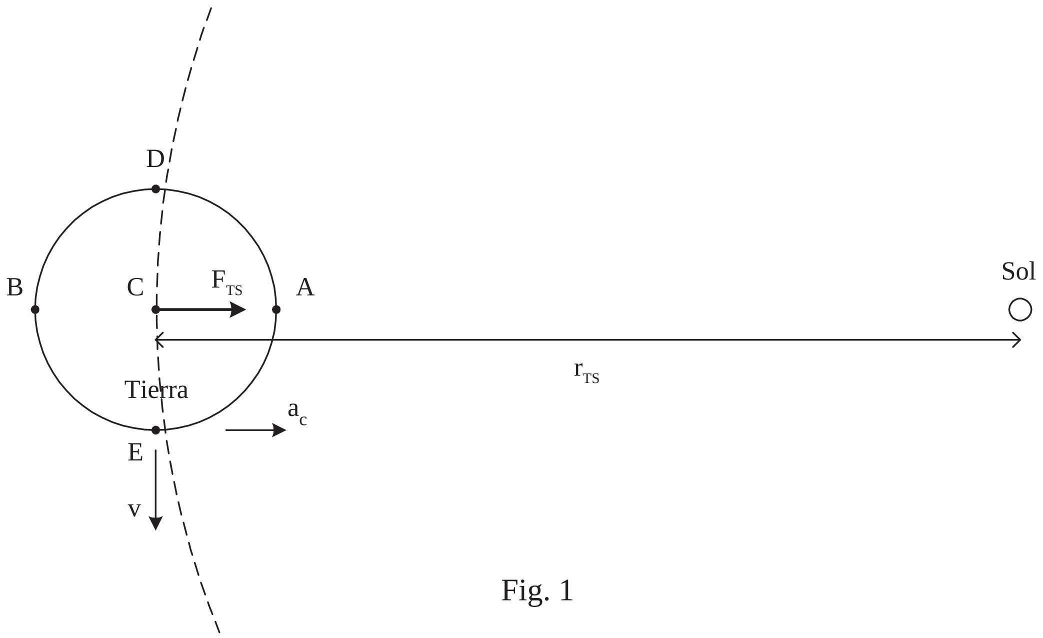

Fig. 1

La fuerza $\vec{F}_{\text{TS}}$ provoca que el centro de la Tierra, punto C en la Fig. 1, se mueva (dentro de las aproximaciones mencionadas) con movimiento circular uniforme alrededor del Sol. El radio correspondiente es r_{TS}, y el período $T = 1$ año. Usando la segunda ley de Newton, encontramos que la aceleración centrípeta de la Tierra es

$$a_c \;=\; \frac{F_{\text{TS}}}{M_{\oplus}} \;=\; \frac{GM_{\odot}}{r_{\text{TS}}^2} \;=\; \frac{v^2}{r_{\text{TS}}} \;, \tag{2}$$

de donde se tiene que $a_c = 5.9 \times 10^{-3}$ m/s^2 y la velocidad orbital v es de unos 30 km/s.

Para estudiar el origen de las mareas sobre la superficie de la Tierra, consideraremos solamente el movimiento de ésta alrededor del Sol. Esta es una aproximación, ya que la Tierra gira además sobre su propio eje, pero los efectos de que la Tierra gire sobre sí misma se pueden agregar luego como una corrección. De este modo, un sistema de referencia fijo a la Tierra no será inercial, sino que se moverá con aceleración $\vec{a}_c$ respecto del sistema (aproximadamente inercial) fijo al Sol.

Imaginemos ahora que se colocan balanzas en diferentes puntos sobre la superficie terrestre. Recordemos que una balanza no mide el peso de un cuerpo, sino la fuerza normal de contacto $\vec{N}$ que el cuerpo ejerce sobre ella. Supongamos que la Tierra fuera un sistema inercial. En ese caso una balanza en equilibrio sobre la superficie terrestre medirá

$$N \; = \; F_g \; , \tag{3}$$

donde

$$F_g \; = \; \frac{m\, G M_\oplus}{R_\oplus^2} \; = \; m\, g \tag{4}$$

es la fuerza con que la Tierra atrae al cuerpo hacia abajo. Sin embargo, una balanza ubicada dentro de un ascensor que se mueve con una aceleración hacia arriba $\vec{a}_1$ medirá $N' > N$. De acuerdo con la segunda ley de Newton (ver Fig. 2), la nueva normal N' vendrá dada por

$$N' - F_g \; = \; m\, a_1 \; , \qquad\qquad N' \; = \; F_g + m\, a_1 \; , \tag{5}$$

donde m es la masa del cuerpo. Si el ascensor está acelerado hacia abajo con aceleración $\vec{a}_2$ se tendrá $N'' = F_g - m\, a_2$, mientras que si la aceleración es paralela a la superficie se tendrá nuevamente $N = F_g$. Uno se "siente más pesado" si está en un ascensor acelerado hacia arriba, y se "siente más liviano" en un ascensor acelerado hacia abajo.

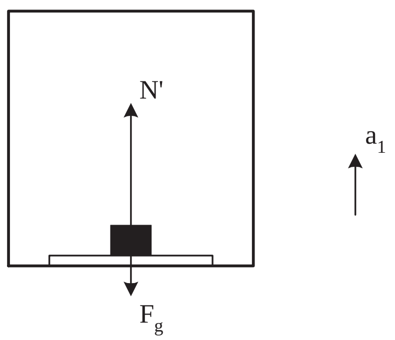

Fig. 2

Volvamos ahora a considerar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, fijando nuestro sistema de referencia en el centro de éste, y analicemos lo que ocurre con la balanza si está ubicada en los distintos puntos A, B, C, D y E de nuestro planeta.

- Punto C

  En el centro de la Tierra, punto C, el campo gravitatorio creado por la Tierra es nulo. Como se ha mencionado, el punto C se mueve con aceleración centrípeta $\vec{a}_c = \vec{F}_{\mathrm{TS}}/M_\oplus$, por ende un cuerpo sobre una balanza en C se comportaría como si estuviese en caída libre hacia el Sol, y la balanza marcaría cero.

- Puntos D y E

  Los puntos D y E (despreciando la elevación aparente causada por la atmósfera) tienen al Sol en el horizonte. Tomemos el punto D y veamos qué fuerzas están ejercidas sobre un cuerpo de masa m colocado allí sobre una balanza. Considerando las componentes verticales de las fuerzas ejercidas sobre este cuerpo (ver Fig. 3), y teniendo en cuenta que la componente vertical de la aceleración es cero, la balanza medirá

$$N_D \ = \ F_g + F_{\mathrm{mS,D}} \operatorname{sen}\theta \ , \tag{6}$$

  donde

$$F_{\mathrm{mS,D}} \ = \ \frac{m\, GM_\odot}{r_{\mathrm{TS}}^2 + R_\oplus^2} \ , \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta \ = \ \frac{R_\oplus}{\sqrt{r_{\mathrm{TS}}^2 + R_\oplus^2}} \ . \tag{7}$$

  Es decir que la balanza marcará un "peso" *mayor* que el usual. La razón es que hay una

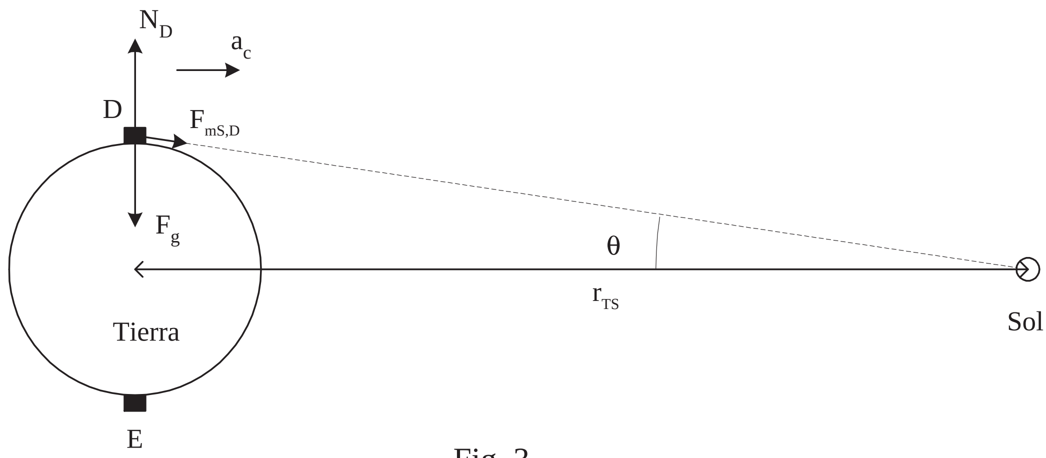

Fig. 3

  pequeña componente de $\vec{F}_{\mathrm{mS,D}}$ dirigida hacia el centro de la Tierra. Despreciando $R_\oplus^2$ frente a r_{TS}^2, a partir de las ecs. (6) y (7) se tiene

$$N_{\mathrm{D}} \ = \ m\,(g + \Delta g_{\mathrm{D}}) \ , \qquad\qquad \Delta g_{\mathrm{D}} \ \simeq \ \frac{GM_\odot R_\oplus}{r_{\mathrm{TS}}^3} \ . \tag{8}$$

  Numéricamente se obtiene $\Delta g_{\mathrm{D}} = 2.5 \times 10^{-7}$ m/s^2. Para el punto E el razonamiento es similar, obteniéndose $N_{\mathrm{E}} = N_{\mathrm{D}}$.

- Punto A

  El punto A es un punto sobre la superficie terrestre que tiene al Sol en su cenit. Este punto se encuentra una distancia $R_\oplus$ más cerca del Sol que C, por lo tanto la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por el Sol sobre un cuerpo de masa m ubicado en A será ligeramente mayor que sobre el mismo cuerpo ubicado en el centro de la Tierra. Además en A la aceleración (vista desde la Tierra) está dirigida hacia arriba, por lo tanto una balanza que esté colocada allí medirá un “peso” $N_{\rm A}$ que difiere del que mide una balanza no acelerada. Usando la segunda ley de Newton tenemos que (ver Fig. 4)

$$N_{\rm A} + F_{\rm mS,A} - F_g = m a_c \ . \tag{9}$$

De acuerdo con la ec. (2), y la Ley de Gravitación Universal, se tiene entonces

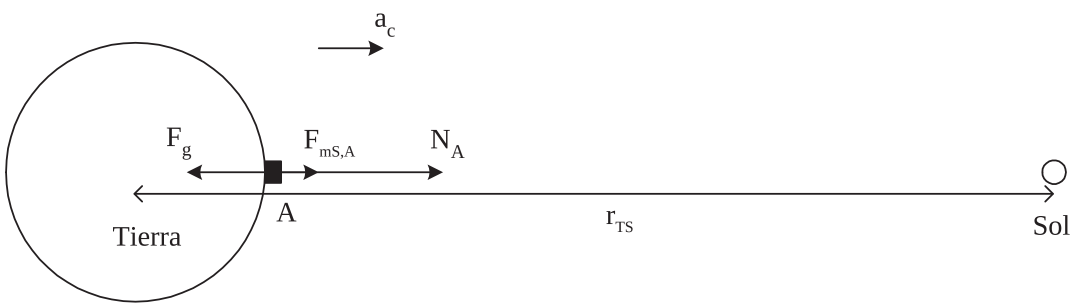

Fig. 4

$$N_{\rm A} \ = \ -\frac{mGM_\odot}{(r_{\rm TS} - R_\oplus)^2} + mg + \frac{mGM_\odot}{r_{\rm TS}^2} \ . \tag{10}$$

El primer término del lado derecho de esta expresión puede escribirse

$$-\frac{mGM_\odot}{(r_{\rm TS} - R_\oplus)^2} \ = -\frac{mGM_\odot (r_{\rm TS} + R_\oplus)^2}{(r_{\rm TS}^2 - R_\oplus^2)^2} \ \simeq -\frac{mGM_\odot (r_{\rm TS}^2 + 2 r_{\rm TS} R_\oplus)}{r_{\rm TS}^4} \ , \tag{11}$$

donde nuevamente hemos despreciado $R_\oplus^2$ frente a $r_{\rm TS}^2$. Reemplazando en (10) obtenemos

$$N_{\rm A} \ = \ m\,(g + \Delta g_{\rm A}) \ , \qquad\qquad \Delta g_{\rm A} \ \simeq \ -\frac{2GM_\odot R_\oplus}{r_{\rm TS}^3} \ . \tag{12}$$

De modo que, en contraposición con lo que ocurre en D y E, en A la balanza marca *menos* que lo esperado. La razón física es que la fuerza ejercida por el Sol (que vista desde la Tierra está dirigida hacia arriba) es mayor que la necesaria para provocar la aceleración centrípeta $\vec{a}_c$ con que orbita todo el sistema Tierra.

- Punto B

Finalmente, el punto B (donde es de noche) se encuentra una distancia $R_\oplus$ más lejos del Sol que C, y por lo tanto la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por el Sol sobre un cuerpo de masa m ubicado en B será menor que sobre el mismo cuerpo ubicado en el centro de la Tierra. Ahora la aceleración (vista desde la Tierra) está dirigida hacia abajo (ver Fig. 5). La lectura de una balanza ubicada en B será

$$N_{\rm B} - F_{\rm mS,B} - F_g = -m a_c \ , \tag{13}$$

de donde

$$N_{\rm B} \ = \ \frac{mGM_\odot}{(r_{\rm TS} + R_\oplus)^2} + mg - \frac{mGM_\odot}{r_{\rm TS}^2} \ . \tag{14}$$

Aproximando en forma análoga a la llevada a cabo para el caso del punto A, se obtiene

$$N_{\mathrm{B}} \;=\; m\,(g + \Delta g_{\mathrm{B}}) \;, \qquad\qquad \Delta g_{\mathrm{B}} \;\simeq\; -\frac{2GM_{\odot}R_{\oplus}}{r_{\mathrm{TS}}^3} \;. \tag{15}$$

Por lo tanto en B la balanza nuevamente marca <u>*menos*</u> que lo esperado. Ahora la fuerza ejercida por el Sol (vista desde la Tierra) está dirigida hacia abajo, y es menor que la necesaria para provocar la aceleración centrípeta $\vec{a}_c$ con que orbita todo el sistema Tierra.

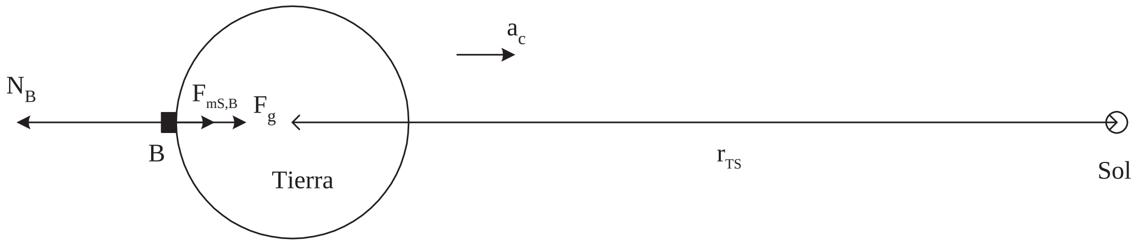

Fig. 5

En conclusión hemos obtenido

$$\Delta g_{\mathrm{A}} \;\simeq\; \Delta g_{\mathrm{B}} \;\simeq\; -2\Delta g_{\mathrm{D}} \;\simeq\; -2\Delta g_{\mathrm{E}} \;\simeq\; -\frac{2GM_{\odot}R_{\oplus}}{r_{\mathrm{TS}}^3} \;. \tag{16}$$

Esto significa que, debido a la fuerza de atracción solar y al movimiento orbital de la Tierra, los cuerpos ubicados en A y B se "sienten más livianos" que si la Tierra fuera un sistema inercial, mientras que los ubicados en D y E se "sienten más pesados". Si imaginamos a la Tierra como un sólido recubierto por un fluido en equilibrio gravitatorio, la consecuencia de este efecto es que el espesor del fluido se incrementará en los puntos A y B, y disminuirá en los puntos D y E. Un cálculo numérico conduce a que el incremento en A y B será de 16.3 cm, mientras que la disminución en D y E será de 8.15 cm (observar que $\Delta g_{\mathrm{A,B}} \simeq -2\Delta g_{\mathrm{D,E}}$). En A y B existirán (simultáneamente) dos *pleamares*, y en D y E dos *bajamares* de origen solar. Y por lo tanto, si consideramos que la Tierra rota sobre su eje, esperamos la presencia de *dos* pleamares y *dos* bajamares diarias en cada playa.

Naturalmente, este análisis debe tomarse sólo como una descripción cualitativa, dado que se han llevado a cabo muchas aproximaciones. Aún es necesario tener en cuenta la inclinación del eje de rotación terrestre respecto del plano orbital, los efectos producidos por este movimiento de rotación, la presencia de océanos y continentes, el hecho de que la Tierra no es esférica ni uniforme, etc.

Las mareas originadas por la presencia de la Luna pueden comprenderse usando un razonamiento completamente análogo. Sólo que en este caso los cocientes entre las distancias y las masas involucradas son muy diferentes, y el centro de masa está sensiblemente desplazado respecto del centro del cuerpo más masivo (en este caso la Tierra). Numéricamente, dentro de las aproximaciones consideradas, el efecto producido por la Luna es aproximadamente el doble del producido por el Sol. Depende de la posición relativa entre el Sol y la Luna que los efectos debidos a ambos cuerpos se combinen de forma constructiva, o se contrarresten entre sí.