Nota adicional: Órbitas

Consideremos un sistema aislado formado por dos cuerpos de masas m y M, modelados como partículas, que se atraen entre sí por la interacción gravitatoria. El módulo de esta fuerza es

$$F \ = \ \frac{G\,m\,M}{r^2} \ , \tag{1}$$

donde r es la distancia entre los cuerpos.

Estudiaremos el caso en que uno de los cuerpos posee una masa mucho mayor que el otro, digamos $M \gg m$. En ese caso el centro de masa del sistema se encuentra ubicado aproximadamente en el cuerpo de masa M, de modo que en ausencia de fuerzas externas (supusimos que el sistema estaba aislado) un marco de referencia fijo al cuerpo de masa M es aproximadamente inercial. Fijemos entonces un sistema coordenado con origen en M. En este sistema, el cuerpo de masa m estará en general ubicado en un punto P de coordenadas polares (r, θ), como muestra la Figura 1, y tendrá velocidad $\vec{v}$. La trayectoria del cuerpo vendrá dada por una curva $r(\theta)$ en el plano que contiene a $\vec{v}$ y al cuerpo de masa M.

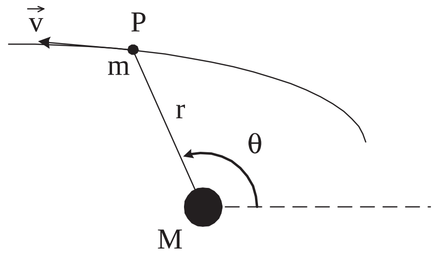

Fig. 1

Para encontrar la curva que describe la trayectoria del cuerpo de masa m es conveniente tener en cuenta que en el sistema se conservan tanto la energía mecánica como el momento angular. En el marco fijo a M, la energía mecánica del sistema es

$$E_{\rm mec} \ = \ \frac{1}{2}\,m\,v^2 \ - \ \frac{k}{r} \ , \tag{2}$$

donde $k = G\,m\,M$, habiéndose definido la energía potencial gravitatoria U de modo que $U = 0$ cuando $r \to \infty$. Por otro lado, el momento angular del sistema respecto del origen de coordenadas (situado en el cuerpo de masa M) viene dado por

$$\vec{L} \ = \ m\,\vec{r} \times \vec{v} \ , \tag{3}$$

donde $\vec{r}$ es un vector de módulo r, dirigido desde el origen hasta el punto P. El momento angular es constante debido a que la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo de masa m ejerce un torque nulo respecto del origen.

Conviene ahora descomponer la velocidad $\vec{v}$ en una componente con dirección radial, v_r, y otra componente con dirección "angular", v_θ. En términos del cambio de r y θ con el tiempo, estas componentes vienen dadas por

$$v_r \ = \ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \ , \qquad v_\theta \ = \ r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \ . \tag{4}$$

Dado que la parte radial de $\vec{v}$ es paralela a $\vec{r}$, el módulo del momento angular resulta[†]

$$L \;=\; m\,r\,v_\theta \;=\; m\,r^2\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\;, \tag{5}$$

mientras que, como las componentes de $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí, la energía cinética será

$$K \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v^2 \;=\; \frac{1}{2}\,m\,(v_r^2\,+\,v_\theta^2)\;. \tag{6}$$

Finalmente tenemos que la energía mecánica viene dada por

$$E_{\mathrm{mec}} \;=\; \frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 \;+\; \frac{L^2}{2mr^2} \;-\; \frac{k}{r}\;. \tag{7}$$

Ahora bien, la curva que describe la trayectoria quedará determinada por una dada función $r(\theta)$, siendo a su vez θ función del tiempo. Usando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\;. \tag{8}$$

Para $L \neq 0$, de (5) y (7) se obtiene entonces

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \;=\; \frac{mr^2}{L}\,\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{\mathrm{mec}} + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}\;. \tag{9}$$

La ecuación (9) es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables. Para encontrar la solución conviene considerar la función inversa, $\theta(r)$, cuya derivada respecto de r es

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1} \;=\; \frac{L}{mr^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{\mathrm{mec}} + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}\;. \tag{10}$$

Esta ecuación puede integrarse directamente:

$$\int \mathrm{d}\theta \;=\; \int \mathrm{d}r\,\frac{1}{r^2\sqrt{\frac{2mE_{\mathrm{mec}}}{L^2} + \frac{2mk}{L^2 r} - \frac{1}{r^2}}}\;. \tag{11}$$

Para resolver la integral en el lado derecho de la ecuación (11), es conveniente realizar un cambio de la variable r por una nueva variable u, siendo

$$u = \frac{1}{r}\;, \qquad \mathrm{d}u = -\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r\;. \tag{12}$$

Se tiene así

$$\int \mathrm{d}\theta \;=\; -\int \mathrm{d}u\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2mE_{\mathrm{mec}}}{L^2} + \frac{2mk}{L^2}\,u - u^2}}\;. \tag{13}$$

[†]Dado que $\vec{L}$ es constante, v_θ no puede cambiar de signo. De este modo, sin pérdida de generalidad siempre puede considerarse $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t \geq 0$.

Completando el cuadrado, el argumento de la raíz cuadrada puede escribirse como

$$\frac{2mE_{\rm mec}}{L^2} + 2\,\frac{mk}{L^2}\,u - u^2 \;=\; -\left(u - \frac{mk}{L^2}\right)^2 \;+\; \left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 \;+\; \frac{2mE_{\rm mec}}{L^2}\;. \tag{14}$$

Conviene definir ahora[†]

$$p \;=\; \frac{L^2}{mk}\;, \qquad \varepsilon \;=\; \sqrt{1 + \frac{2E_{\rm mec}L^2}{mk^2}}\;, \tag{15}$$

de modo que la suma de los dos últimos términos de la ecuación (14) resulta

$$\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 \;+\; \frac{2mE_{\rm mec}}{L^2} \;=\; \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^2\;, \tag{16}$$

y se tiene entonces

$$\int {\rm d}\theta \;=\; -\int {\rm d}u\,\frac{1}{\sqrt{-\,(u-1/p)^2 \,+\, (\varepsilon/p)^2}} \;=\; -\int {\rm d}u\,\frac{p/\varepsilon}{\sqrt{1 \,-\, (p/\varepsilon)^2\,(u-1/p)^2}}\;. \tag{17}$$

El siguiente paso es realizar una nueva sustitución, pasando a una variable w dada por

$$u = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\,\cos w\;, \qquad {\rm d}u = -\frac{\varepsilon}{p}\,{\rm sen}\,w\,{\rm d}w\;. \tag{18}$$

En términos de w el argumento de la raíz cuadrada en la ecuación (17) es

$$1 \,-\, \left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2\left(u - \frac{1}{p}\right)^2 \;=\; 1 - \cos^2 w \;=\; {\rm sen}^2\,w\;, \tag{19}$$

y de este modo se obtiene finalmente

$$\int {\rm d}\theta \;=\; \int {\rm d}w\;. \tag{20}$$

Como la elección del eje respecto del cual se mide el ángulo θ es arbitraria, la constante de integración puede tomarse igual a cero, esto es,

$$\theta \;=\; w \tag{21}$$

(esto es equivalente a fijar una “condición inicial” para la solución general de la ecuación diferencial).

Ahora, a partir de las ecuaciones (12), (18) y (21) se puede relacionar al ángulo θ con la variable original r:

$$\cos\theta \;=\; \cos w \;=\; \frac{p}{\varepsilon}\left(u - \frac{1}{p}\right) \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{r} \,-\, 1\right)\;. \tag{22}$$

Y de este modo se obtiene finalmente la ecuación

$$r(\theta) \;=\; \frac{p}{1 \,+\, \varepsilon\,\cos\theta}\;, \tag{23}$$

que describe la trayectoria del cuerpo de masa m en las coordenadas polares definidas inicialmente.

Las curvas que obedecen a una ecuación de la forma (23) se denominan *secciones cónicas*, porque se obtienen a partir de la intersección de un cono y un plano. De acuerdo con el valor de la constante ε, llamada *excentricidad*, se clasifican en:

[†]Si bien $E_{\rm mec}$ puede ser menor que cero, puede verse que sólo tienen sentido físico los sistemas en los que $2E_{\rm mec}L^2/(mk^2) \geq -1$.

- Circunferencias ($\varepsilon = 0$, $r = p = L^2/(GMm^2) = \text{cte.}$)
- Elipses ($0 < \varepsilon < 1$)
- Parábolas ($\varepsilon = 1$)
- Hipérbolas ($\varepsilon > 1$, sólo una rama)

Queda finalmente por considerar el caso $L = 0$. De acuerdo con la ecuación (5), $L = 0$ implica $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$, y por lo tanto $\theta =$ constante. Lo que significa que para este caso el movimiento es radial, es decir, tiene lugar sobre una semirrecta que tiene como extremo el origen de coordenadas. Es el caso, por ejemplo, de un cuerpo arrojado en dirección vertical hacia arriba desde la superficie de la Tierra.