Problema 7) ①

a) El módulo de compresibilidad isotérmico se define como:

$$K_T = -V \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T .$$

Vamos a calcularlo para un gas ideal.
Empezamos con la ecuación de estado:

$$PV = NRT \Rightarrow P = \frac{NRT}{V} \Rightarrow \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T = -\frac{NRT}{V^2}$$

Como $\frac{NRT}{V} = P$, entonces

$$\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T = -\frac{P}{V} \Rightarrow \boxed{K_T = P}$$

El módulo de compresibilidad de un gas ideal es igual a la presión a la que está sometido.

b) El módulo de compresibilidad adiabático se define como:

$$K_{ad.} = -V \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{ad.}$$

Donde ad. significa que la derivada es sobre la curva adiabática.
Para un gas ideal, la curva adiabática viene dada por

$$PV^\gamma = c$$, donde c es una constante

$\gamma = \frac{5}{3}$ para un gas ideal monoatómico y $\gamma = \frac{7}{5}$ para uno diatómico.

Entonces

$$P = \frac{c}{V^\gamma} \Rightarrow \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{ad.} = -\gamma \frac{c}{V^{\gamma+1}} = -\frac{\gamma}{V}\left(\frac{c}{V^\gamma}\right) = -\frac{\gamma}{V} P$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{ad} = -V \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{ad.} = \gamma P.}$$

c) La velocidad de propagación de ondas longitudinales en un fluido viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\rho}}$$, donde ρ es la densidad de masa.

Podemos escribir: $\rho = \dfrac{m_{mol} N}{V}$, donde m_{mol} es la masa molar del gas y N el número de moles.

Entonces:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\frac{m_{mol} N}{V}}} = \sqrt{\frac{\gamma P V}{m_{mol} N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma R T}{m_{mol}}}$$, en donde hemos usado la ecuación de estado en la última igualdad.

Problema 10)

El calor específico es la cantidad de energía que hay que suministra para aumentar en un grado la temperatura de un mol de sustancia.

El calor específico a presión constante es:

$$C_P \equiv \frac{1}{N} \frac{\partial E}{\partial T}\bigg|_P .$$

En general, es una función de la temperatura.

Por la definición, la variación de energía será:

$$\Delta E = N \int_{T_i}^{T_f} C_P \, dT$$. donde T_i y T_f son las temperaturas inicial y final del proceso

Si

$$C_P(T) = a + bT,$$

entonces

$$\Delta E = Na \int_{T_i}^{T_f} T \, dT + Nb \int_{T_i}^{T_f} dT$$

$$= Na \frac{T^2}{2}\bigg|_{T_i}^{T_f} + Nb (T_f - T_i)$$

$$= Na (T_f^2 - T_i^2) + Nb (T_f - T_i).$$

Problema 11) Este es un problema de calorimetría, que es interesante porque hay diferentes posibilidades.

Hay agua a 0°C y hielo a −10 °C en un termo, y ponemos una pequeña masa de hierro a muy alta temperatura (240 °C).

Pueden pasar varias cosas.

Si la energía encerrada en el hierro es lo suficientemente pequeña, lo único que va a hacer es calentar el hielo hasta una temperatura $T_f \leq 0°C$. En ese caso el hielo no se fundiría (transición de fase).

Plantiemos este caso. La condición de equilibrio es que los 3 cuerpos (agua, hielo y hierro) lleguen a la misma temperatura final, T_f. La ecuación de calorimetría es:

$$① \quad m_a C_a (T_f - T_i^{(a)}) + m_h C_h (T_f - T_i^{(h)}) + m_{Fe} C_{Fe} (T_f - T_i^{(Fe)}) = 0,$$

donde

Datos: m_a, C_a y $T_i^{(a)}$ es la masa, el calor específico por unidad de masa y la temperatura inicial del agua, respectivamente. m_h, C_h y $T_i^{(h)}$ es para el hielo, y m_{Fe}, C_{Fe} y $T_i^{(Fe)}$ para el hierro.

La ecuación ① es válida sólo si $T_f \leq 0°C$, si $T_f > 0°C$ hay que agregar un término por la fusión del hielo!

La ecuación ① es una ecuación para T_f. Si la resolvemos usando los datos, obtenemos que

$$T_f = 3,56 \text{ °C},$$

lo cual es un absurdo, porque la ec. ① es válida sólo si suponemos que $T_f \leq 0°C$.

Entonces, podemos estar seguros que al menos una parte del hielo se va a derretir. Eso és lo que vamos a plantear.

Supongamos que $T_f = 0$ °C y que se derrite una fracción x de la masa de hielo, es decir

$x = \frac{m_d}{m_h}$, donde m_h es la masa del hielo y m_d es la masa de hielo que se derrite.

claramente $x \leq 1$.

Recuerden que las transiciones de fase son a temperatura constante. Entonces, si sólo se derrite una parte del hielo, sí o sí la temperatura final es $T_f = 0\,°C$.
En otras palabras, si hay coexistencia de agua y hielo entonces la temperatura es $0\,°C$.
Lo que sí hay, es un calor latente de fusión que el hielo debe absorber para derretirse.
La ecuación de calorimetría queda en este caso:

$$(2)\quad m_a c_a \left(T_f - T_i^{(a)}\right) + m_h c_h \left(T_f - T_i^{(h)}\right) + m_{Fe}\left(T_f - T_i^{(Fe)}\right) + \underbrace{m_h \cdot x}_{= m_d} \cdot L_f = 0$$

Como asumimos $T_f = 0\,°C$, (2) es una ecuación para x, la fracción de hielo que se derrite. Si la resolvemos usando los datos del problema, obtenemos:

$$x = 0.25 .$$

que es consistente con la condición $x \leq 1$.
Entonces, la temperatura final del sistema es $T_f = 0\,°C$, y se derrite $1/4$ de la masa de hielo.
Si nos hubiera dado $x > 1$, era un absurdo, y significaría que en realidad se derrite todo el hielo y la temperatura final es $T_f > 0\,°C$. ~~En ese caso, la ecuación~~

En ese caso, la ecuación de calorimetría es: ③

$$③ \quad m_a c_a \left(T_f - T_i^{(a)}\right) + m_{Fe} c_{Fe} \left(T_f - T_i^{(Fe)}\right)$$

$$+ \underbrace{m_h c_h \left(0°C - T_i^{(h)}\right)}_{\text{Este término es por calentar el hielo de } -10°C \text{ a } 0°C} + \underbrace{m_h L_f}_{\text{Este es por derretirlo.}} + \underbrace{m_h c_a \left(T_f - 0°C\right)}_{\text{Este es por calentar el agua líquida que queda luego de derretir totalmente el hielo, de } 0°C \text{ a } T_f.} = 0$$

con $T_f > 0°C$ y $T_f < 100°C$

Ahora, si T_f llega a dar $T_f > 100°C$ a partir de la ecuación ③, entonces es un absurdo, porque ③ vale sólo si $T_f < 100°C$, es decir, si no se evapora el agua. Si hay evaporación hay que agregar un término con el calor latente de vaporización, L_v.

Les dejo a ustedes plantear este caso, que es relevante si la masa de ~~hielo~~ hierro es de 1kg, como sugiere la última parte del problema.