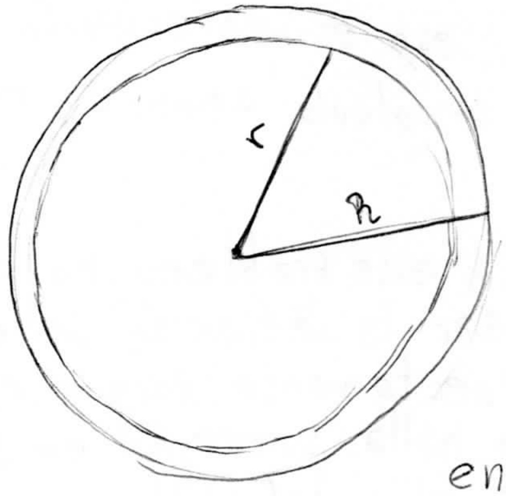
Problema 12) El esquema es así:



El radio interior del casquete es r, el radio exterior es R. El espesor del casquete es $R-r$.

Cuando el casquete está sumergido en agua, actúan 2 fuerzas, su peso y el empuje. Si el casquete está en equilibrio, entonces

$$P - E = 0.$$

calculemos cada fuerza por separado:

Peso) El volumen del casquete esférico es el volumen de la esfera grande menos el volumen de la esfera más chica:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3).$$

Entonces el peso es

$$P = \rho_{Pb} V g,$$ en donde ρ_{Pb} es la densidad del Plomo.

Empuje) El volumen de agua desplazado es el volumen de la esfera grande:

$$V_R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Así que el empuje es:

$$E = V_R \cdot \rho_a g,$$ en donde ρ_a es la densidad del agua.

La ecuación de equilibrio es entonces:

$$E = P$$

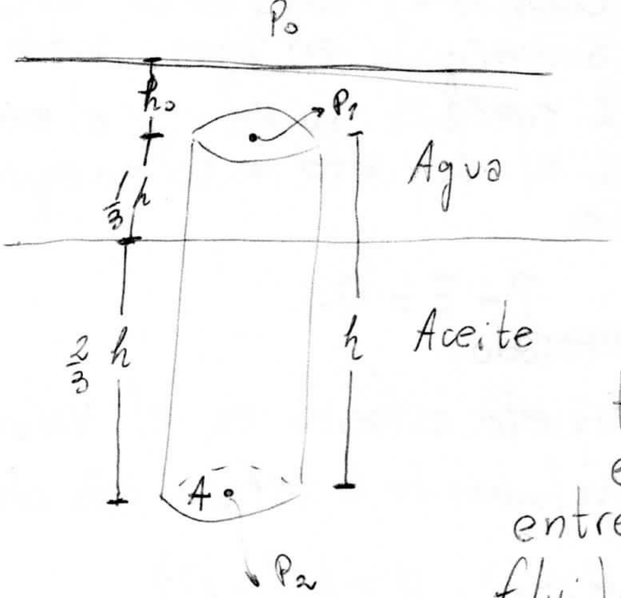
$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3) \rho_{Pb}$$

Entonces

$$R^3 \rho_{Pb} = (R^3 - r^3)\rho_a$$

Como R, ρ_{Pb}, ρ_a son conocidos, eso es una ecuación para r. Una vez que conocemos r, el espesor se calcula como dijimos antes.

Problema (3) El esquema es así:



En este problema no podemos usar la definición del empuje directamente, porque el objeto se halla sumergido en dos líquidos diferentes.

Vamos a usar un método alternativo. Vamos a calcular el empuje como la diferencia entre las fuerzas que ejercen los fluidos sobre la cara superior (1) y sobre la cara inferior (2):

$$E = P_2 \cdot A - P_1 A = (P_2 - P_1) A,$$

en donde P_1 es la presión sobre la cara de arriba, P_2 sobre la de abajo y A es el área transversal del cilindro.

Calculemos esas presiones:

$$P_1 = P_0 + \rho_a g h_0,$$ en donde h_0 es la altura de agua por sobe la cara superior.

$$P_2 = P_0 + \rho_a g h_0 + \rho_a g \frac{1}{3} h + \rho_{ac} g \frac{2}{3} h,$$

en donde ρ_a y ρ_{ac} son las densidades del agua y el aceite respectivamente.

El empuje es entonces

$$E = (P_2 - P_1) A = \rho_a g \frac{1}{3} h A + \rho_{ac} g \frac{2}{3} h A.$$

Como hA es el volumen V del objeto, podemos escribir:

$$E = \rho_a g \frac{1}{3} V + \rho_{ac} g \frac{2}{3} V.$$

Este resultado es el mismo que si hubiéramos sumado los empujes en uno y otro fluido.

Ahora, el peso es

$P = V \rho_c \cdot g$, en donde ρ_c es la densidad del cilindro (la incógnita).

La condición de equilibrio es:

$$E = P$$

$$\rho_a g \frac{V}{3} + \rho_{ac} g \frac{2}{3} V = V \rho_c g$$

O sea:

$$\frac{1}{3} \rho_a + \frac{2}{3} \rho_{ac} = \rho_c.$$

De donde se puede calcular ρ_c, dado que ρ_a y ρ_{ac} son conocidas.