Problema 7

a) Sólo actúa la fuerza gravitacional de la Tierra.

b) Como se trata de un sistema conservativo, la diferencia de energía mecánica (ΔE) es cero. Esto implica que:

$\Delta K = -\Delta U$, en donde ΔU es la energía potencial y ΔK es la energía cinética.

Como $\Delta K = \Delta W$, entonces

$$\Delta W = -\Delta U.$$

Podemos calcular ΔU:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\frac{G M_T m}{2 R_T} - \left(-\frac{G M_T m}{R_T}\right)$$

$$\Delta U = \frac{G M_T m}{2 R_T}$$, M_T = Masa de la Tierra.

$$\Rightarrow \Delta W = -\frac{G M_T m}{2 R_T}.$$

La fuerza gravitatoria hace un trabajo negativo.

c) Usamos la conservación de la energía. Suponemos que llega a esa altura con velocidad 0:

$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_T m}{R_T} \qquad E_f = -\frac{G M_T m}{2 R_T}$$

Igualando E_i y E_f obtenemos una ecuación para v_0.
Esta v_0 es la mínima velocidad necesaria para alcanzar esa altura.

Problema 7

d) Para que el cuerpo escape debe llegar con velocidad cero al infinito: $E_i = \frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{G M_T m}{R_T}$

$E_f = 0$, porque en el infinito la energía potencial es nula.

Igualando $E_i = E_f$ obtengo una ecuación para la velocidad de escape desde la superficie de la Tierra.

Problema 12

a) La energía potencial del sistema es la energía que es necesaria para traer todas las masas desde el infinito hasta su configuración final.

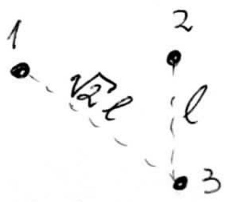
1º La primera masa no cuesta energía traerla desde el infinito, porque no interactúa con nada:

$$U_1 = 0$$

2º La segunda masa interactúa con la primera. La energía necesaria para traerla desde el infinito tiene una sola contribución, proveniente de la interacción con la primera masa:

$$U_2 = U_{21} = -\frac{G m^2}{l}$$

3º La tercera masa interactúa con las 2 primeras:



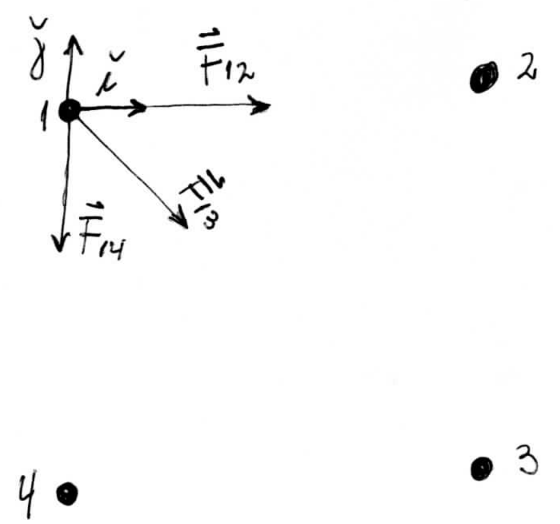
$$U_3 = U_{31} + U_{32} = -\frac{G m^2}{\sqrt{2}\,l} - \frac{G m^2}{l}.$$

4º Al cálculo de la cuarta masa se los dejo a ustedes.

La energía total del sistema es la suma de todos los términos:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4.$$

b) El campo gravitatorio será el mismo sobre cualquiera de las masas. Si elegimos la masa 1:



$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m} = \frac{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}}{m}$$

Eligiendo los versores como se muestra en la figura, muestren que:

$$\vec{g}_1 = \frac{3Gm}{2l}\,(\check{i} - \check{j}).$$

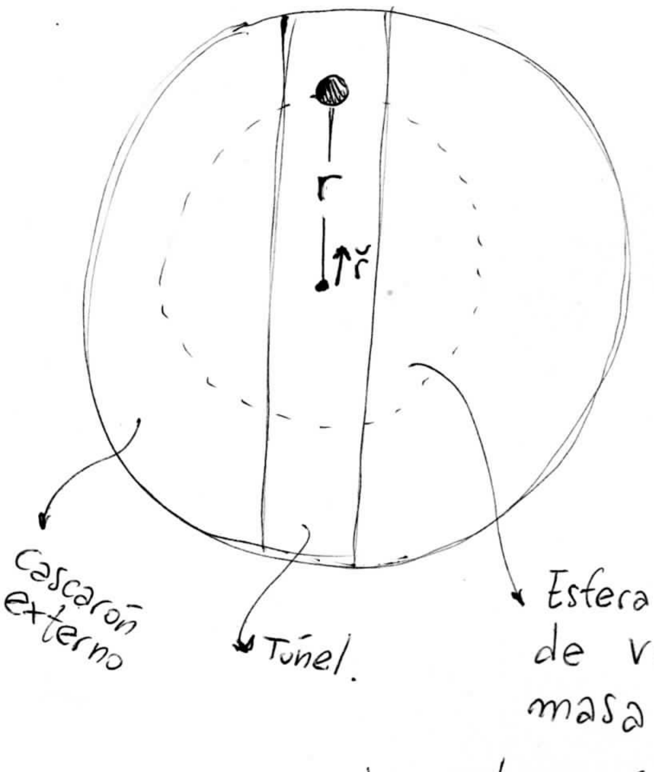
Problema 14

a) Supongamos que el objeto de masa m está a una distancia r del centro de la Tierra:

El objeto sentirá la atracción de un punto de masa

$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, en donde ρ es la densidad del planeta Tierra.

Esto es porque el cascarón externo no hace fuerza neta.



Esfera interna de volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ y masa $\rho\frac{4}{3}\pi r^3$.

La fuerza de atracción será:

$$\vec{F}(r) = -\frac{G\,m\,M(r)}{r^2}\check{r} = -\frac{Gm}{r^2}\frac{4}{3}\pi\rho r^3\,\check{r}$$

$$\vec{F}(r) = -Gm\frac{4}{3}\pi\rho r$$

La fuerza es proporcional al desplazamiento $\Rightarrow$ Movimiento armónico simple.

b) La ecuación del MAS es:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -Gm\frac{4}{3}\pi\rho r \Rightarrow$$ la "constante del resorte" k es

$$k = Gm\frac{4}{3}\pi\rho$$

$\Rightarrow$ La frecuencia del MAS es:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{G\frac{4}{3}\pi\rho}$$

$w = \frac{2\pi}{T}$, T: periodo.

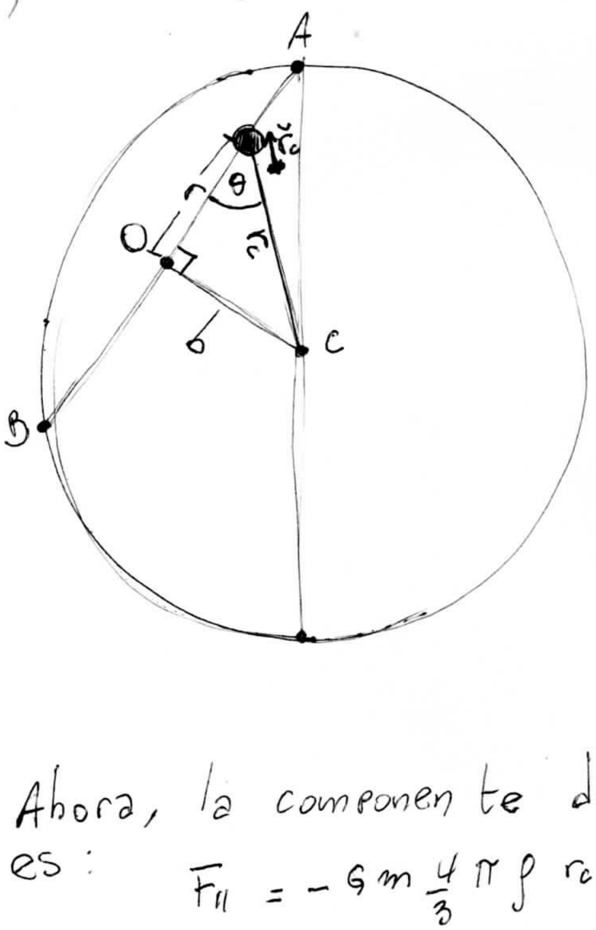
El viaje de un extremo a otro dura $\frac{T}{2}$:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{w} = \sqrt{\frac{\pi}{G\frac{4}{3}\rho}}$$

c) La aceleración máxima es

$a_{max} = R_T w^2$, porque la amplitud del MAS es R_T.

d) La geometría es:



A = La Plata , B = Neuquén

C = centro de la Tierra.

O = Mitad de camino entre A y B.

r = Distancia del objeto al punto O

r_c = Distancia del objeto al centro de la Tierra.

Haciendo las mismas consideraciones que en el inciso a), vemos que:

$$\vec{F} = -Gm\frac{4}{3}\pi\rho r_c \check{r}_c.$$

Ahora $r_c = \sqrt{r^2+b^2}$.

Ahora, la componente de la fuerza $\vec{F}$ sobre la línea AOB es:

$$F_{\parallel} = -Gm\frac{4}{3}\pi\rho r_c \cos\theta = -Gm\frac{4}{3}\pi\rho\sqrt{r^2+b^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}}$$

Es decir:

$$F_{\parallel} = -G m \frac{4}{3} \pi \rho r$$

, que es un MAS con la misma frecuencia que el inciso anterior.

$\Rightarrow$ Va a tardar lo mismo en ir desde La Plata a Neuquén que desde un punto a las antípodas.