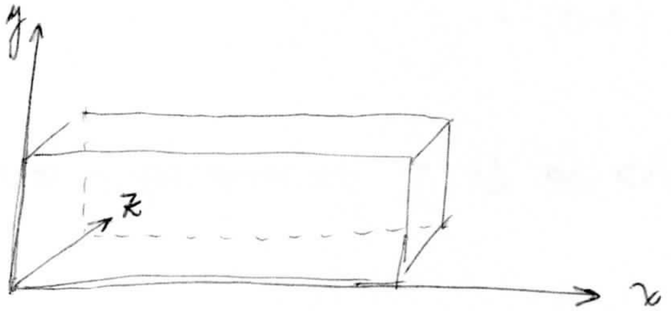
Problema 13

El cuerpo está sometido a esfuerzos en todas las direcciones.



$S_x \neq 0$
$S_y \neq 0$
$S_z \neq 0$

Los esfuerzos en S_y y S_z son tales que las deformaciones en esas direcciones son 0: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$.

Las ecuaciones que ligan esfuerzos y deformaciones en 3 dimensiones son:

$$① \quad \varepsilon_x = \frac{1}{Y}\left[S_x - \sigma(S_y + S_z)\right]$$

$$② \quad \varepsilon_y = \frac{1}{Y}\left[S_y - \sigma(S_x + S_z)\right]$$

$$③ \quad \varepsilon_z = \frac{1}{Y}\left[S_z - \sigma(S_x + S_y)\right]$$

En donde Y es el módulo de Young, σ es el módulo de Poisson, y las deformaciones son $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_0}$, $\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y_0}$, $\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z_0}$.
Reemplazando los datos del problema ①, ② y ③ son:

$$① \quad \varepsilon_x = \frac{1}{Y}\left[S_x - \sigma(S_y + S_z)\right]$$

$$② \quad 0 = \frac{1}{Y}\left[S_y - \sigma(S_x + S_z)\right]$$

$$③ \quad 0 = \frac{1}{Y}\left[S_z - \sigma(S_x + S_y)\right]$$

a) Usando ② y ③ es fácil mostrar que $S_y = S_z$

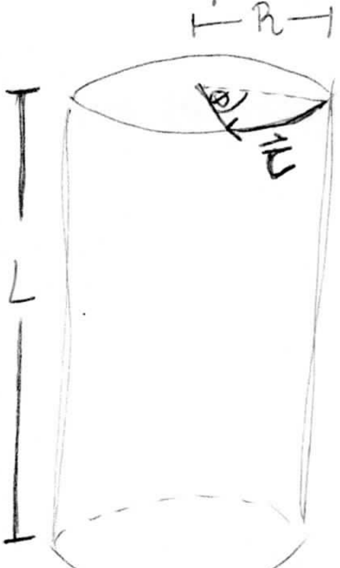
b) y c) Usando que $S_y = S_z$, ① y ② podemos encontrar una expresión de S_x en función de ε_x solamente, que nos permite resolver estos incisos. La relación es (demostrar):

$$\varepsilon_x = \frac{S_x}{Y} \left\{ 1 - \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)} \right\}$$

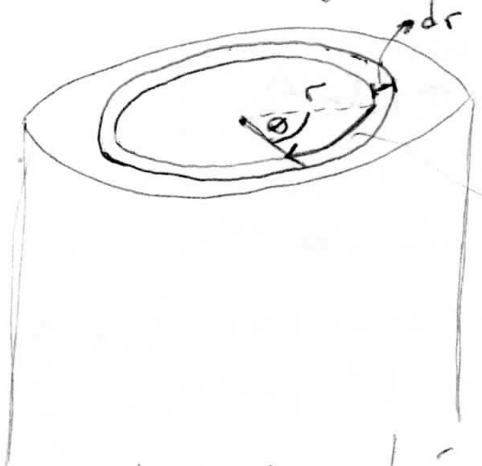
Nota: Una deformación relativa de 0.1% quiere decir que $\varepsilon_x \cdot 100 = 0.1$

Problema 14

El esquema es así:

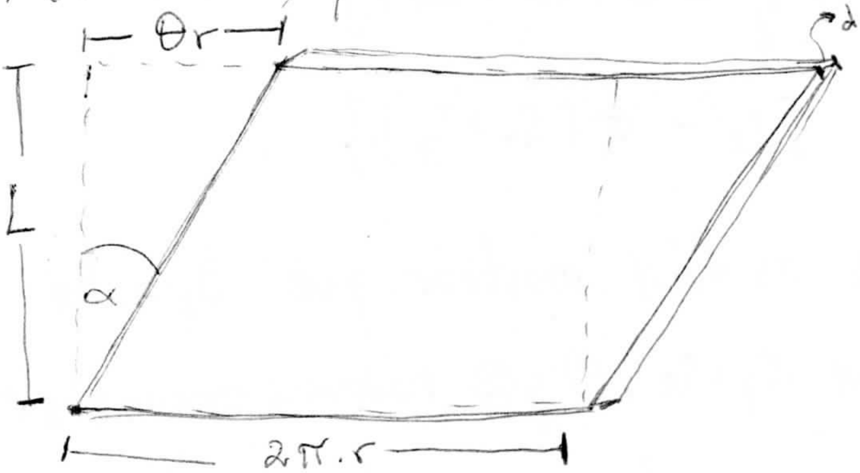


$\vec{\tau}$ es el torque que hay que aplicar para torsionar el cilindro un ángulo θ.
La base del cilindro está fija.
Dividimos al cilindro en láminas concéntricas de radio r y espesor dr:



Este arco de circunferencia mide una longitud $\theta \cdot r$.

Si tomamos a una de estas láminas y la "desplegamos" (desenrrollamos) vamos a ver que está sujeta a un esfuerzo tangencial (de corte) que causa una deformación:



En líneas punteadas la posición de la lámina sin deformación.

Esto quiere decir que la deformación de la lamina es

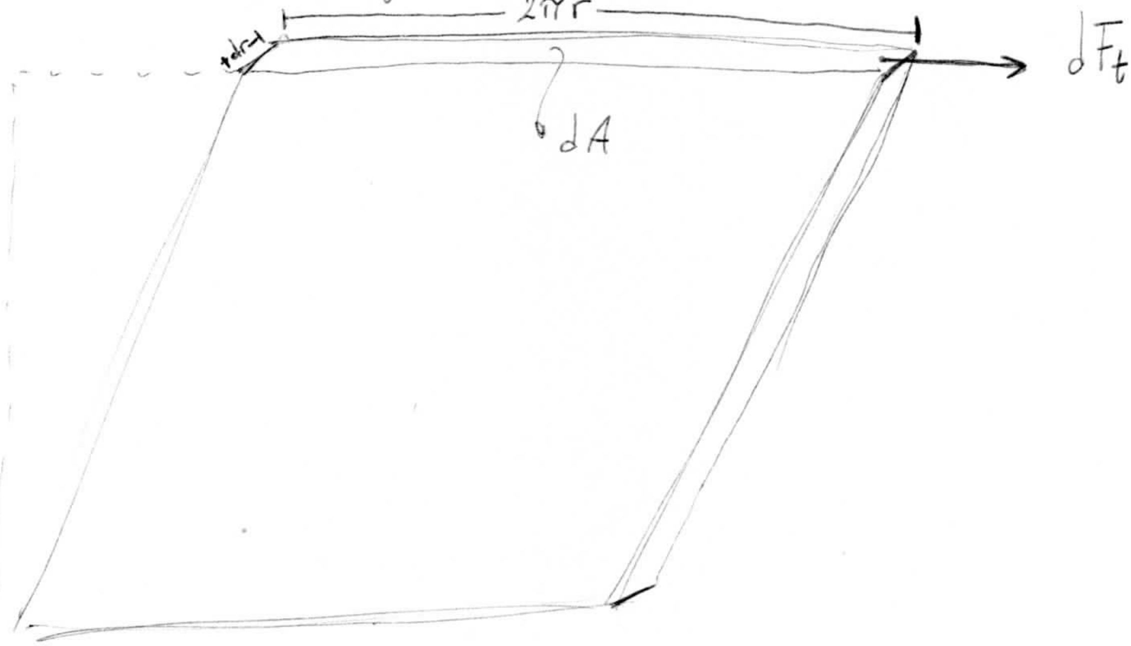
$$tg(\alpha) = \frac{\theta . r}{L}$$

Eso implica que la lámina está sometida a un esfuerzo tangencial dado por

$$S_t = G\, tg(\alpha) = G\,\frac{\theta . r}{L},$$

en donde G es el módulo de torsión del material.

Podemos pensar que ese esfuerzo tangencial está relacionado con una fuerza tangencial sobre la lámina:



El área sobre la que se ejerce la fuerza es

$$dA = 2\pi r dr$$

Entonces:

$$dF_t = S_t\, dA = \frac{G\theta}{L} 2\pi r^2 dr.$$

Si calculamos torques con respecto al centro del cilindro, esta fuerza está relacionada con un torque:

$$d\tau = r\, dF_t = \frac{G\theta}{L} 2\pi r^3 dr.$$

Para obtener el torque total sumamos sobre todas las laminas:

$$\tau = \int_{\text{todas las laminas}} d\tau = \int_0^R \frac{G\theta}{L} 2\pi r^3 dr = \frac{G\theta}{2L}\pi R^4.$$