

Trabajo Práctico 1 - Álgebra vectorial. Unidades de medida y análisis dimensional

A - Problemas para entrar en calor

Esta sección contiene problemas directos, que sólo requieren conocimientos ya adquiridos y/o aplicación inmediata de la teoría. Por favor, si no consiguen resolverlos solxs, no duden en consultar: este momento es el ideal para completar los conocimientos que les permitan encarar ejercicios menos directos.

1. a) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo? b) ¿Qué relación existe entre los ángulos agudos de un triángulo rectángulo? c) ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero? d) ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo isósceles de lados a , a y $a/2$?
2. Un punto del plano se localiza en un sistema de coordenadas polares mediante las coordenadas $r = 4$ m y $\theta = 60^\circ$. Determinar sus coordenadas en el correspondiente sistema de ejes cartesianos. Si las coordenadas cartesianas de un punto en un dado sistema de ejes cartesianos son $(2, -2)$, ¿cuáles son sus coordenadas polares?
3. Para el sistema de ejes coordenados y los vectores representados en la Figura 1, indicar qué vector o vectores a) tienen componente x distinta de cero; b) tienen componente x negativa; c) tienen componente y cero; d) tienen componente x positiva y componente y negativa. e) Indicar cuál de los vectores representados es el de mayor módulo. f) ¿Tiene sentido afirmar que un vector es “positivo” o “negativo”?
4. Dado un sistema de dos ejes cartesianos, calcular las componentes y el módulo de un vector cuyo origen está en el punto $(2,2)$ y su extremo en el punto $(-2,4)$. Graficar este vector y escribirlo en forma canónica.
5. a) Escribir en notación científica: 602.600.000.000; 0,00000000745; 0.0000000128; -125000000000.25
b) Responder, usando notación científica: ¿Cuántos metros son 5 km ? ¿Cuántos microgramos son 1000 ng ? ¿Cuántos segundos son 5 ms ?

B - Problemas menos directos

Esta sección contiene problemas que requieren un poco más de elaboración. Nuestro objetivo es que aprendan a resolverlos y entenderlos en profundidad. Algunos de ellos se discutirán detalladamente en las clases prácticas. Por favor, intenten resolverlos antes de esa discusión: no sirve de nada copiar lo que hacen otrxs; sólo los problemas encarados de manera independiente (si es posible, con distintos enfoques, incluso cuando no se tenga éxito) sirven para entender las cosas en profundidad.

1. a) Utilizando el teorema de Pitágoras y las definiciones de las funciones seno y coseno, demuestre que, para cualquier ángulo θ , se cumple la identidad trigonométrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
b) A partir de $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ y las fórmulas para senos y cosenos de sumas y restas de ángulos, probar las siguientes identidades trigonométricas:
b1) $1 + \tan^2 \theta = 1/\cos^2 \theta$; b) $\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1$;
b2) $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$.
2. Un objeto es levantado 13 m a lo largo de un plano inclinado un ángulo $\pi/4$. ¿A qué altura por encima de su posición original se lo ha levantado? ¿Cuánto se movió en dirección horizontal?
3. Dos puntos en el plano xy tienen, en cierto sistema de ejes cartesianos, coordenadas $(2, 4)$ m y $(-3, 3)$ m.
a) Determinar las coordenadas polares correspondientes. b) Calcular la distancia entre los puntos.
4. Considerar un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ con la horizontal. Definir un sistema cartesiano de coordenadas caracterizado por versores \hat{i} y \hat{j} , como muestra la Figura 2. a) Encontrar las componentes de los versores \hat{n} , normal al plano inclinado, y \hat{t} , paralelo al mismo, en el sistema caracterizado por \hat{i} y \hat{j} . Observar que los versores \hat{t} y \hat{n} definen un nuevo sistema de coordenadas cartesianas, con ejes rotados respecto a los del sistema anterior.
b) Sea el vector $\vec{A} = 3\hat{n} + 2\hat{t}$. Encontrar las componentes del vector \vec{A} en el sistema caracterizado por \hat{i} y \hat{j} .

\hat{j} , esto es, encontrar a y b tales que $\vec{A} = a\hat{i} + b\hat{j}$. Obsérvese que, para un mismo vector, sus componentes cambian al elegir distintos sistemas de coordenadas.

c) Calcular, ahora, las componentes del vector $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$ en el sistema caracterizado por \hat{t} y \hat{n} .

5. Dados los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} + 6\hat{j}$ y $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j}$: a) Usando la regla del paralelogramo, representar el vector suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ y el vector $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$. b) Calcular las componentes cartesianas del versor \hat{C} y del versor \hat{D} . c) ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas y polares que caracterizan al extremo de \vec{C} ?
6. Para cada uno de los siguientes casos calcular $\vec{A} - \vec{B}$, $\vec{A} + 2\vec{B}$ y $|\vec{A} - \vec{B}|$. Representar gráficamente: a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j}$; b) $A = 8$ unidades, la recta que define su dirección forma un ángulo de 60° con el eje x y el vector está en el primer cuadrante, $B = 5$ unidades, la recta que define su dirección forma un ángulo de 45° con el eje y y el vector está en el segundo cuadrante.
7. Una persona camina 350 m hacia el norte, luego 240 m hacia el oeste y, finalmente, 520 m hacia el sur. ¿Cuántos metros y en qué dirección y sentido volaría en línea recta un pájaro que quisiera llegar al mismo punto? (Resuelva gráfica y analíticamente). Compare la distancia recorrida por cualquiera de los dos con el total de metros recorridos por la persona.
8. Demostrar que, si \vec{A} y \vec{B} no son colineales, entonces $x\vec{A} + y\vec{B} = \vec{0}$, con x e y escalares reales implica $x = y = 0$.
9. Denotaremos con $[X]$ a las unidades de una magnitud física X . De este modo, $[m]$, $[l]$ y $[t]$ denotan dimensiones de masa, longitud y tiempo, respectivamente. En el sistema internacional (SI) éstas son kilogramo (kg), metro (m) y segundo (s). En términos de estas unidades, las de otras magnitudes que se introducirán durante el curso son:

Módulo de velocidad (v)	$[l]/[t]$
Módulo de aceleración (a)	$[l]/[t]^2$
Módulo de fuerza (F)	$[m][l]/[t]^2$
Energía (E)	$[m][l]^2/[t]^2$
Potencia (P)	$[E]/[t]$
Densidad (ρ)	$[m]/[l]^3$
Área (A)	$[l]^2$
Volumen (V)	$[l]^3$

a) Probar que las expresiones $\frac{1}{2}mv^2$, mgh y Fl tienen dimensiones de energía (aquí g es el módulo de la aceleración de la gravedad, y h denota altura por sobre algún nivel de referencia).

b) Probar que Ft tiene las mismas dimensiones que mv .

10. En las expresiones siguientes, la posición x se mide en metros, el tiempo t en segundos y v denota el módulo de la velocidad. Hallar, en cada caso, las dimensiones de las constantes C_1 , C_2 y C_3 . a) $x = C_1 + C_2 t + C_3 t^2$. b) $x = C_1 \sin(C_2 t + C_3)$. c) $v = C_1 \cos(C_2 t)$.
11. Un vehículo viaja con una velocidad cuyo módulo es 120 kilómetros por hora. ¿Cuál es el módulo de su velocidad en metros por segundo?
12. a) Supongamos que el módulo del desplazamiento s de una partícula que se mueve con una aceleración uniforme \vec{a} puede escribirse en función del módulo de dicha aceleración (a) y del tiempo transcurrido (t) en la forma $s = k a^m t^n$, donde k es una constante adimensional. Mostrar, mediante análisis dimensional, que esta expresión es correcta sólo si $m = 1$ y $n = 2$.
b) El módulo a de la aceleración de una partícula que se mueve con módulo de velocidad (v) constante sobre una circunferencia de radio r viene dado por $a = v^m r^n$. Hallar m y n .

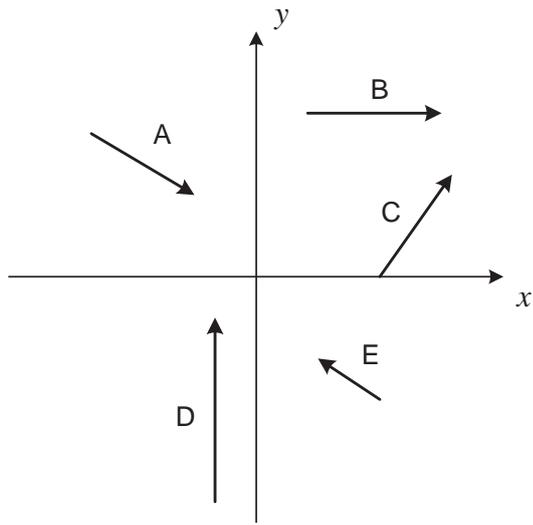


Fig. 1

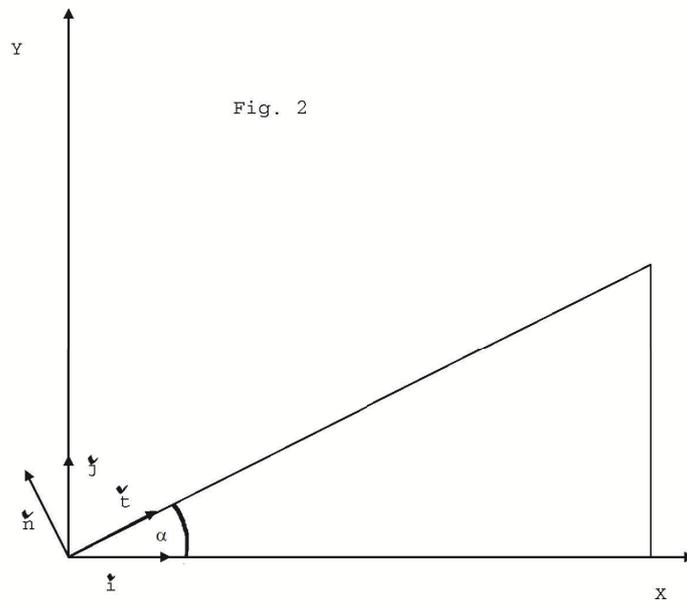


Fig. 2