Física General I – Año 2021

Trabajo Práctico 1 - Álgebra vectorial. Unidades de medida y análisis dimensional

1. a) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo? b) ¿Qué relación existe entre los ángulos agudos de un triángulo rectángulo? c) ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero? d) ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo isósceles de lados a, a y $a/2$?

2. A partir de $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ y las fórmulas para senos y cosenos de sumas y restas de ángulos, probar las siguientes identidades trigonométricas: a) $1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$; b) $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$; c) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$.

3. Un punto del plano se localiza en un sistema de coordenadas polares mediante las coordenadas r = 4 m y $\theta = 60°$. Determinar sus coordenadas en el correspondiente sistema de ejes cartesianos. Si las coordenadas cartesianas de un punto en un dado sistema de ejes cartesianos son $(2, -2)$, ¿cuáles son sus coordenadas polares?

4. Para el sistema de ejes coordenados y los vectores representados en la Figura 1, indicar qué vector o vectores a) tienen componente x distinta de cero; b) tienen componente x negativa; c) tienen componente y cero; d) tienen componente x positiva y componente y negativa. e) Indicar cuál de los vectores representados es el de mayor módulo. f) ¿Tiene sentido afirmar que un vector es “positivo” o “negativo”?

5. Dado un sistema de dos ejes cartesianos, calcular las componentes y el módulo de un vector cuyo origen está en el punto (2,2) y su extremo en el punto (-2,4). Graficar este vector y escribirlo en forma canónica.

6. Considerar un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ con la horizontal. Definir un sistema cartesiano de coordenadas caracterizado por versores $\check{\imath}$ y $\check{\jmath}$, como muestra la Figura 2. a) Encontrar las componentes de los versores $\check{n}$, normal al plano inclinado, y $\check{t}$, paralelo al mismo, en el sistema caracterizado por $\check{\imath}$ y $\check{\jmath}$. Observar que los versores $\check{t}$ y $\check{n}$ definen un nuevo sistema de coordenadas cartesianas, con ejes rotados respecto a los del sistema anterior.
b) Sea el vector $\vec{A} = 3\check{n} + 2\check{t}$. Encontrar las componentes del vector $\vec{A}$ en el sistema caracterizado por $\check{\imath}$ y $\check{\jmath}$, esto es, encontrar a y b tales que $\vec{A} = a\,\check{\imath} + b\,\check{\jmath}$. Obsérvese que, para un mismo vector, sus componentes cambian al elegir distintos sistemas de coordenadas.
c) Calcular ahora las componentes del vector $\vec{B} = 2\,\check{\imath} + 4\,\check{\jmath}$ en el sistema caracterizado por $\check{t}$ y $\check{n}$.

7. Dados los vectores $\vec{A} = 2\,\check{\imath} + 6\,\check{\jmath}$ y $\vec{B} = \check{\imath} - 2\,\check{\jmath}$: a) Usando la regla del paralelogramo, representar el vector suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ y el vector $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$. b) Calcular las componentes cartesianas del versor $\check{C}$ y del versor $\check{D}$. c) ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas y polares que caracterizan al extremo de $\vec{C}$?

8. Calcular las componentes B_x y B_y de un vector $\vec{B}$ que tenga módulo 4 y sea paralelo al vector $\vec{A} = 3\,\check{\imath} - 4\,\check{\jmath}$. ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el eje x?

9. El *producto escalar* de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota $C = \vec{A} \cdot \vec{B}$. a) ¿Puede asignársele una dirección a C? b) ¿Puede ocurrir que sea $C = 0$ aun siendo A y B diferentes de cero? c) Si se deja $\vec{A}$ fijo y se varían la dirección y el sentido de $\vec{B}$, para qué dirección y sentidos de $\vec{B}$ se obtiene un valor máximo y un valor mínimo del producto escalar C?

10. Dados los vectores $\vec{V}_1 = \check{\imath} + 3\,\check{\jmath} - 2\,\check{k}$, $\vec{V}_2 = 2\,\check{\imath} + 6\,\check{\jmath} - 4\,\check{k}$, $\vec{V}_3 = -3\,\check{\imath} + 4\,\check{\jmath}$: a) Calcular $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$, $\vec{V}_1 - |\vec{V}_3|\vec{V}_2$, $\check{k} \cdot \vec{V}_2/|\vec{V}_3|$. b) Determinar el ángulo formado entre los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ y el ángulo formado entre $\vec{V}_1$ y el eje y. c) Hallar a tal que el vector $-\,\check{\imath} + a\,\check{\jmath} + \check{k}$ sea ortogonal a $\vec{V}_2$.

11. Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen módulos de 10 y 15 unidades respectivamente y el vector resultante de sumarlos tiene módulo 20 unidades, ¿cuál es el ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

12. Demostrar que, si los módulos de la suma y de la diferencia de dos vectores son iguales, entonces los vectores son perpendiculares.

13. Hallar la proyección del vector $\vec{a} = \check{\imath} + \check{\jmath} + 2\,\check{k}$ sobre la recta cuyos cosenos directores son $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

14. El *producto vectorial* de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. a) Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano de la hoja, ¿qué dirección(es) y sentido(s) puede tener $\vec{C}$? b) Si se deja $\vec{A}$ fijo y se varía la dirección y el sentido de $\vec{B}$, para qué dirección(es) y sentido(s) de $\vec{B}$ se obtiene un valor máximo y un valor mínimo de $|\vec{C}|$?

15. a) Dados los vectores $\vec{V}_i$, $i = 1, 2, 3$ del ejercicio 10, calcular $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3)$, $2\vec{V}_1 \times \vec{V}_3$ y $\vec{V}_1 \times \check{\jmath}$. b) Verificar que $\vec{V}_1 \times \lambda \vec{V}_1 = 0$ para cualquier λ real. c) Probar que los vectores $3\,\check{\imath} + \check{\jmath} - 2\,\check{k}$ y $\check{\imath} + \check{\jmath} + 2\,\check{k}$ son perpendiculares. d) ¿Podría haberse anticipado el resultado $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) = 0$?

16. Denotaremos con $[X]$ a las unidades de una magnitud física X. De este modo, $[m]$, $[l]$ y $[t]$ denotan dimensiones de masa, longitud y tiempo, respectivamente. En el sistema internacional (SI) éstas son kilogramo (kg), metro (m) y segundo (s). En términos de estas unidades, las de otras magnitudes que se introducirán durante el curso son:

Módulo de velocidad (v)	....	$[l]/[t]$
Módulo de aceleración (a)	....	$[l]/[t]^2$
Módulo de fuerza (F)	....	$[m][l]/[t]^2$
Energía (E)	....	$[m][l]^2/[t]^2$
Potencia (P)	....	$[E]/[t]$
Densidad (ρ)	....	$[m]/[l]^3$
Área (A)	....	$[l]^2$
Volumen (V)	....	$[l]^3$

a) Probar que las expresiones $\frac{1}{2}mv^2$, mgh y Fl tienen dimensiones de energía (aquí g es es el módulo de la aceleración de la gravedad, y h denota altura por sobre algún nivel de referencia).

b) Probar que Ft tiene las mismas dimensiones que mv.

17. En las expresiones siguientes, la posición x se mide en metros, el tiempo t en segundos y v denota el módulo de la velocidad. Hallar, en cada caso, las dimensiones de las constantes C_1, C_2 y C_3. a) $x = C_1 + C_2\,t + C_3\,t^2$. b) $x = C_1 \operatorname{sen}(C_2\,t + C_3)$. c) $v = C_1 \cos(C_2\,t)$.

18. Un vehículo viaja con una velocidad cuyo módulo es 120 kilómetros por hora. ¿Cuál es el módulo de su velocidad en metros por segundo?

19. a) Supongamos que el módulo del desplazamiento s de una partícula que se mueve con una aceleración uniforme $\vec{a}$ puede escribirse en función del módulo de dicha aceleración (a) y del tiempo transcurrido (t) en la forma $s = k\,a^m\,t^n$, donde k es una constante adimensional. Mostrar, mediante análisis dimensional, que esta expresión es correcta sólo si $m = 1$ y $n = 2$.
b) El módulo a de la aceleración de una partícula que se mueve con módulo de velocidad (v) constante sobre una circunferencia de radio r viene dado por $a = v^m\,r^n$. Hallar m y n.

Más ejercitación

1. Probar las siguientes identidades: a) $\operatorname{sen}(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\beta) = 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
b) $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\right)$; c) $\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$.

2. Dos puntos en el plano xy tienen, en cierto sistema de ejes cartesianos, coordenadas canónicas $(2, 4)$ m y $(-3, 3)$ m. a) Determinar las coordenadas polares correspondientes. b) Calcular la distancia entre los puntos.

3. Un objeto es levantado $13\,m$ a lo largo de un plano inclinado un ángulo $\pi/4$. ¿A qué altura por encima de su posición original se lo ha levantado?¿Cuánto se movió en dirección horizontal?

4. Representar un vector $\vec{V}$ que tenga componentes x e y de igual valor absoluto pero signos opuestos, siendo V_x negativa y V_y positiva. ¿Cuánto vale el cociente $V_y/|\vec{V}|$?

5. Demostrar que, si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ no son colineales, entonces $x\vec{A} + y\vec{B} = \vec{0}$, con x e y escalares reales implica $x = y = 0$.

6. Para cada uno de los siguientes casos calcular $\vec{A} - \vec{B}$, $\vec{A} + 2\vec{B}$ y $|\vec{A} - \vec{B}|$. Representar gráficamente: a) $\vec{A} = 2\,\check{\imath} + 3\,\check{\jmath}$, $\vec{B} = -\,\check{\imath} + \check{\jmath}$; b) $A = 8$ unidades, la recta que define su dirección forma un ángulo de $60°$ con el eje x y el vector está en el primer cuadrante, $B = 5$ unidades, la recta que define su dirección forma un ángulo de $45°$ con el eje y y el vector está en el segundo cuadrante.

7. Una persona camina $350\,m$ hacia el norte, luego $240\,m$ hacia el oeste y, finalmente, $520\,m$ hacia el sur. ¿Cuántos metros y en qué dirección y sentido volaría en línea recta un pájaro que quisiera llegar al mismo punto? (Resuelva gráfica y analíticamente). Compare la distancia recorrida por cualquiera de lxs dos con el total de metros recorridos por la persona.

8. ¿Qué características tienen dos vectores tales que: i) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ y $|\vec{A}|+|\vec{B}|=|\vec{C}|$; ii) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{A}-\vec{B}$?

9. Demostrar que: i) el área de un paralelogramo cuyos lados no paralelos pueden caracterizarse por sendos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es igual a $|\vec{A}\times\vec{B}|$;

   ii) Calcular, realizando el producto vectorial, el área del paralelogramo que definen los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ del ejercicio 7 de la sección anterior.

   iii) Demuestre que el volumen del paralelepípedo cuyos lados quedan definidos por tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ puede calcularse como $|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$.

10. a) ¿Es $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$? Sugerencia: encontrar un contraejemplo.
    b) Demostrar que $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$.

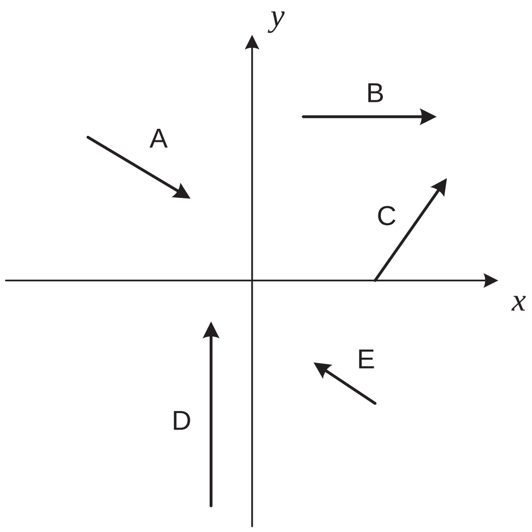

Fig. 1

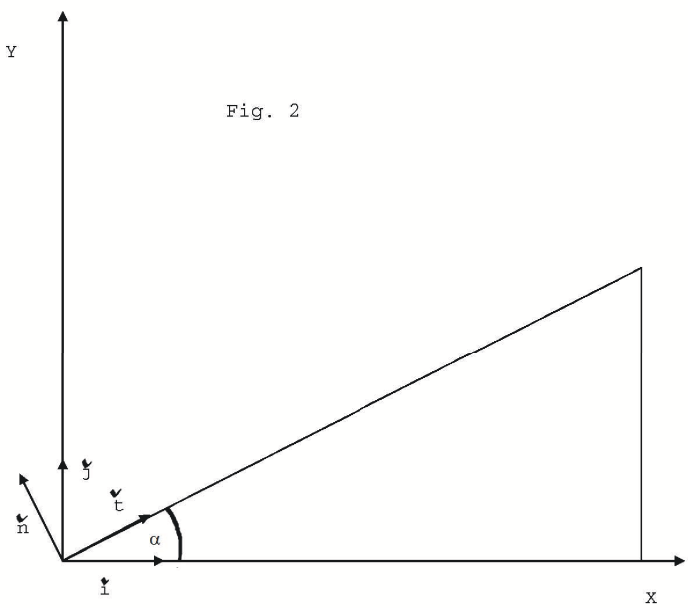

Fig. 2