Funciones de varias variables. Medidas indirectas

Hay magnitudes que no se miden directamente, sino que se derivan de otras que sí son medidas en forma directa.

Por ejemplo, si queremos determinar el volumen de una esfera (V) a partir de la medida del diámetro (D) :

$V=(4/3)\,\pi\,(D/2)^3$ y medimos D (con su incertidumbre ΔD)

¿Cómo podremos determinar en este caso el mejor valor y la incertidumbre de V ? $V \pm \Delta V$??

En primera aproximación:

$$V \pm \Delta V = (1/6)\,\pi\,(D \pm \Delta D)^3$$

$$V \pm \Delta V = (1/6)\pi[D^3 \pm 3D^2\Delta D + \cancel{3D(\Delta D)^2} \cancel{\pm (\Delta D)^3}]$$

$\Delta D/D \ll 1$ (ΔD es muy pequeño)

$$V \pm \Delta V = (1/6)\pi\,(D^3 \pm 3D^2\Delta D)$$

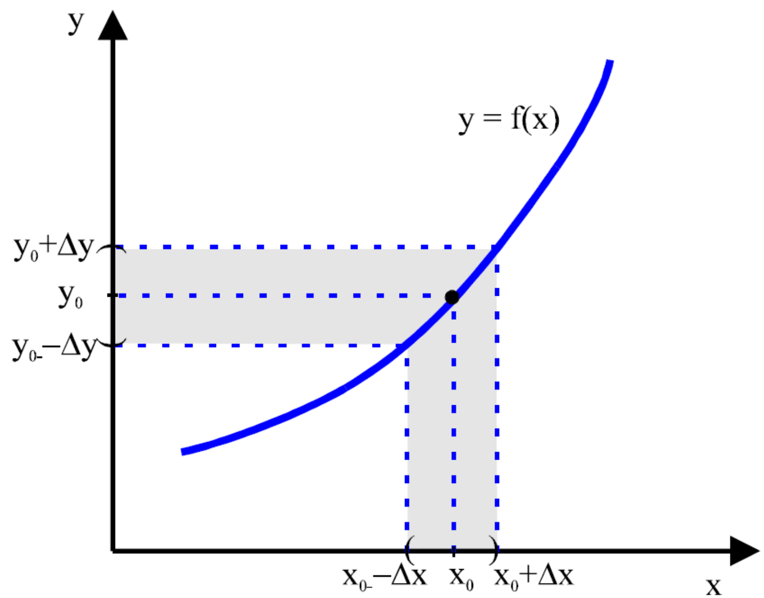
$$\boxed{V \pm \Delta V = \underbrace{(1/6)\pi\, D^3}_{V} \pm \underbrace{(1/6)\pi\, 3D^2\Delta D}_{\Delta V}}$$

Supongamos que medimos en forma directa una magnitud X, el resultado es:

$$X = \langle X \rangle \pm \Delta X = X_0 \pm \Delta X$$

A partir del valor medido de X queremos determinar el valor de otra magnitud Y que es función de X:

$$Y = f(X)$$



$f'(X0)=f(X)-f(X0) / (X-X0)$, cuando x tiende a x0

$f(X)=f(X0)+f'(X0) . (X-X0)$

Se puede demostrar que cualquier función infinitamente diferenciable se puede aproximar por la **Serie de Taylor**:

$$f(x_o + x)= f(x_o) + f\,'(x_o)\, x + f\,''(x_o)\,(x^2 / 2!) +.......+ f^{(n)}(x_o)\,(x_n / n!) +....$$

En el entorno del punto x_o, si Δ x es un valor pequeño

$$f\,(x_o \pm \Delta x) = f\,(x_o) \pm f\,'(x_o)\,\Delta x$$

$$f\,(<x_o> \pm \Delta x\,) = f\,(<x_0>) \pm \ \Delta f \rightarrow \ \Delta f = f\,'(<xo>)\,\Delta x$$

Propagación de la incerteza

En general (para dependencia de varias variables): aproximación de primer órden para la varianza de una medición

$$V = V(x, y, z, \ldots), \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \cdot \Delta z^2 + \cdots}$$

$$\frac{\partial V(x, y, z, \ldots)}{\partial x}$$

representa la variación parcial de *V* para cuando solamente varía x y el resto de las variables permanece fijo.

Esta expresión para ΔV constituye una aproximación, la que resulta válida en la medida que las variables no estén correlacionadas o la correlación sea despreciable en términos de lo que representa numéricamente en la evaluación del error total.

Ejemplo: Determinación de la velocidad media de un móvil

Se desea determinar la velocidad media de un móvil. Para ello se procedió a medir el cambio de su vector posición, $\Delta \mathbf{r}$*, y el intervalo de* tiempo en el que se produjo dicho cambio, Δt.

$$\mathbf{v}_{\text{media}} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$$

En este caso, la función será la velocidad v, y las variable x e y serán Δr *y* Δt*, respectivamente.*

Completada la medida tendremos determinados el mejor valor de Δr, $< \Delta r >$*, y el mejor valor de* Δt , $< \Delta t >$ *, y las correspondientes incertezas* totales, σ_r *y* σ_t *, respectivamente.*

$$\sigma_v = \{[\partial v/\partial(\Delta \boldsymbol{r})]^2\, \sigma_{\Delta r}{}^2 + [\partial v/\partial(\Delta t)]^2\, \sigma_{\Delta t}{}^2\}^{1/2}$$

Para calcular $\partial v/\partial(\Delta \boldsymbol{r})$ tratamos a Δt como una constante

$$\partial v/\partial(\Delta \boldsymbol{r}) = \partial(\Delta \boldsymbol{r} / \Delta t)/\partial(\Delta \boldsymbol{r}) = 1/\Delta t$$

Para calcular $\partial \mathbf{v}/\partial(\Delta t)$ tratamos a $\Delta \boldsymbol{r}$ como una constante

$$\partial \mathbf{v}/\partial(\Delta t) = \partial(\Delta \boldsymbol{r} / \Delta t)/\partial(\Delta t) = -\Delta \boldsymbol{r}/(\Delta t)^2$$

Finalmente,

$$\sigma_v = \{(1/<\Delta t>)^2\, \sigma_{\Delta r}{}^2 + [<\Delta \boldsymbol{r}>/(<\Delta t>)^2]^2\, \sigma_{\Delta t}{}^2\}^{1/2}$$