Física I Experimental - 2016

- Objetivos del curso:
  - Desarrollo de la capacidad de realizar determinaciones experimentales con criterio científico
  - Iniciación al manejo de instrumentación científica y el diseño de experimentos
  - Introducción a la adquisición, tratamiento y análisis de datos experimentales
  - Promover la adquisición de un lenguaje científico-técnico para la elaboración de informes de laboratorio

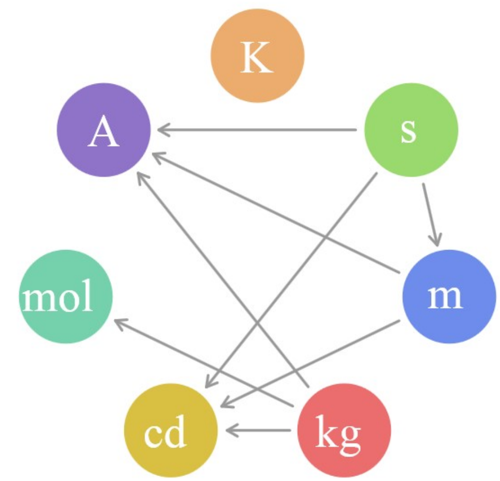
- Docentes:
  - De la Haye, Brian (Ay. Alumno)
  - Orellana, Gonzalo, (Ay. Dip.)
  - Herrera, Facundo (Ay. Dip.)
  - Richard, Diego (Ay. Dip.)
  - Martínez, Javier (JTP)
  - Requejo, Félix (Prof. Adj)

- Detalles de la cursada: ver pautas

(página web de la materia:
http://www.fisica.unlp.edu.ar/materias/fisica-experimental-i)

Unidades fundamentales

Magnitud física que se toma como fundamental	Unidad básica o fundamental	Símbolo de la unidad
Longitud (L)	metro	m
Masa (*M*)	kilogramo	kg
Tiempo (*T*)	segundo	s
Temperatura (*Θ*)	kelvin	K
Intensidad de corriente eléctrica (*I*)	amperio	A
Cantidad de sustancia (*μ*)	mol	mol
Intensidad luminosa (*Iv*)	candela	cd



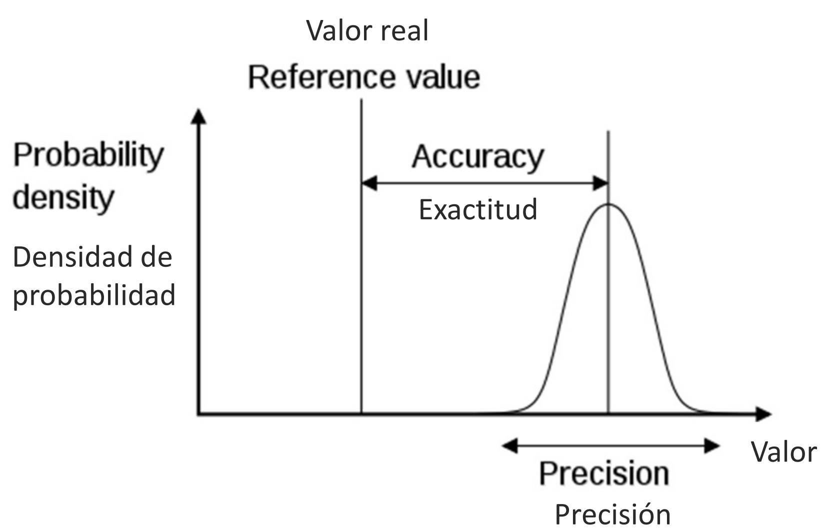
"Seguirá habiendo las mismas siete unidades básicas (metro, segundo, kilogramo, amperio, kelvin, mol y candela). De éstos, el kilogramo, el amperio, el kelvin y el mol se redefinirán de acuerdo al cálculo de los valores numéricos exactos de la constante de Planck, de la carga eléctrica elemental, de la constante de Boltzmann y de la constante de Avogadro, respectivamente. El segundo, el metro y la candela ya están definidas por constantes físicas y sólo es necesario reeditar sus definiciones actuales. Las nuevas definiciones mejorarán el SI sin cambiar el tamaño de las unidades, asegurando así la continuidad con las mediciones actuales.“ (Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM), 2014)

- Independientes
- Describen todas las magnitudes (medibles)

Tiempo y longitud

- Un segundo (s) es el tiempo requerido por 9.192.631.770 ciclos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133. Esta definición fue adoptada en 1967.

- Un metro (m) se define como la distancia que recorre la luz en el vacío en 1 dividido 299.792.458 segundos. Esta norma fue adoptada en 1983 cuando la velocidad de la luz en el vacío fue definida exactamente como 299.792.458 m/s.



Ciencia:

Describe ... No explica!

¿Qué es un experimento?

Motivación:

- Verificar o establecer una hipótesis (teoría simple o compleja).

(a su vez el origen de esta motivación puede ser de diferentes campos, científicos o no)

Características fundamentales:
Un experimento debe ser un procedimiento controlado y reproducible, traducible en conceptos precisos, definidos unívocamente, y su resultado expresable cuantitativamente (en términos de las magnitudes fundamentales o combinaciones de ellas).

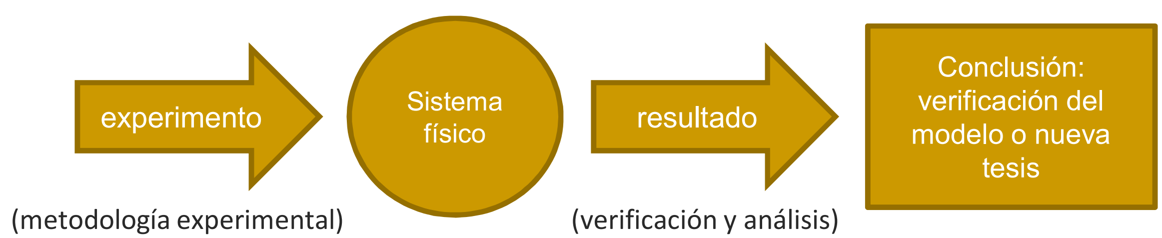
Resultado de un experimento:
Debe ser expresado numéricamente a través de un número con la unidad de la magnitud correspondiente y estar acompañado de una indicación de la precisión de la determinación.

Aspectos relevantes para el diseño de un experimento

Un experimento. en general. intenta responder alguna pregunta o cuestión referida al conocimiento científico (tanto una confirmación como un nuevo paradigma, o simplemente un valor específico para completar de confirmar una hipótesis).

Para ello se necesita:
- Reproducir el proceso o fenómeno en el laboratorio
- Escoger el **sistema físico** que representa el objeto de estudio
- Las condiciones (ambiente) que debe experimentar dicho sistema durante el experimento
- Determinar las magnitudes que deben ser evaluadas (cuantitativamente) y la correspondiente **metodología** (técnica experimental)
- Elegir el arreglo experimental adecuado
- Registrar y documentar el experimento de forma controlada
- Obtener los valores experimentales

Además:
- Verificar y analizar los datos
- Determinar la precisión de la determinación y su valor más probable
- Repetir el experimento (cuando sea posible, sino realizar otros similares que permitan avanzar sobre el mismo objetivo)



Aspectos “relativos” de las determinaciones experimentales:

- En general con un único tipo de experimento no se alcanzan a cubrir todos los análisis necesarios para llegar a una conclusión
- Pueden existir discrepancias “aparentes” (diferentes perspectivas de la observación, diferente sensibilidad o diseño de los aparatos, alteraciones no controladas en el sistema físico)
- El sistema físico, en general, no es el mismo durante la observación (experimento).
- No existe un orden estricto en cuanto a la relación entre “modelo” y “experimento” (puede ser una verificación o un descubrimiento)
- Sin un experimento no existe la validación de la teoría, por otro lado la teoría refuerza la observación o determinación experimental, utilizando conocimientos previos ya demostrados

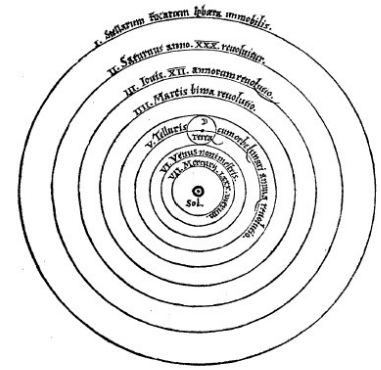
Ejemplo: Brahe y Kepler

https://losmundosdebrana.wordpress.com/2013/06/19/brahe-y-kepler-la-extrana-pareja/

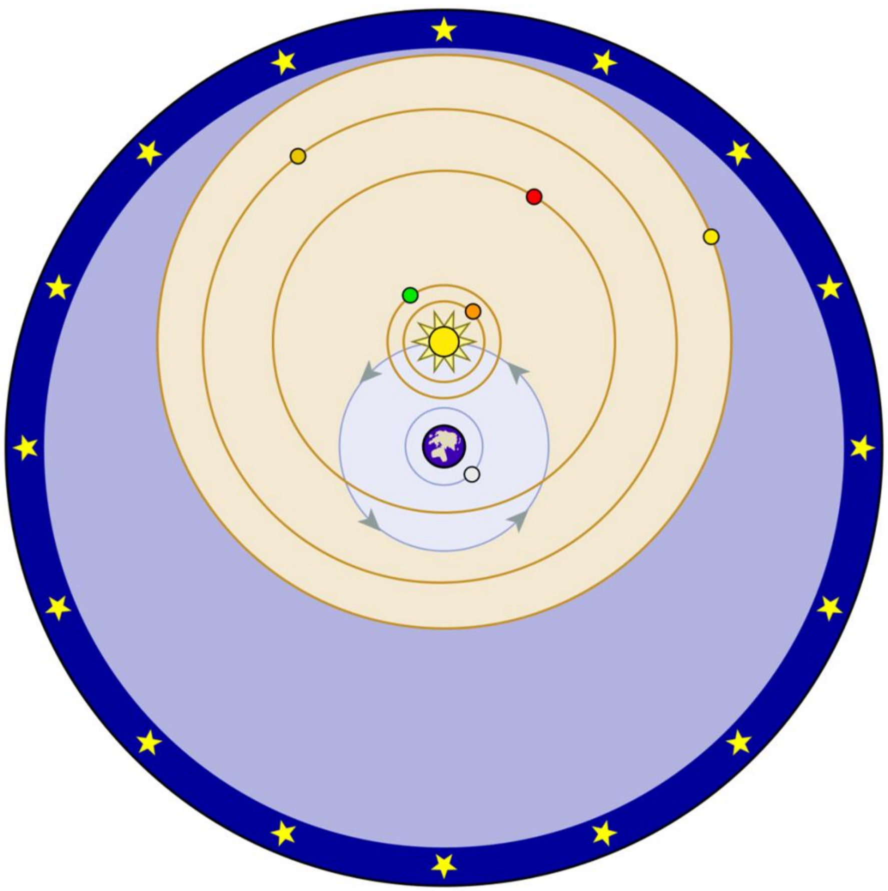
Tycho Brahe (1546-1601), astrónomo danés fue un gran observador del cielo.

Los instrumentos por él diseñados le permitieron medir las posiciones de las estrellas y los planetas con una precisión de ½ minuto de arco.

Estaba convencido que la teoría de Copérnico (teoría heliocéntrica) era errónea y midió con mucha precisión para probarlo.



Modelo de Tycho



Brahe contrató a Kepler (habilidades matemáticas) para que ajustara sus mediciones al modelo Thychonico.

Kepler (1571-1630), estaba interesado en disponer de las mediciones de Brahe para probar sus propias teorías

Gracias a las mediciones de Brahe, Kepler pudo formular las tres leyes que rigen el movimiento de los planetas y que fueron la base para la ley de gravitación universal de Newton.

Diseño del experimento, ejemplo: Medida de la longitud de una mesa.

Magnitud: longitud

Instrumento: la cinta métrica ó regla

Método: determinar cuantas veces la regla y fracciones de ella entran en la longitud buscada.

a) independiente del proceso
b) dependiente del sistema de unidades (ej, 0,5 m ó 50 cm ó 500 mm)

Diseño del experimento, ejemplo:
Medida del espesor de la capa líquida del hielo

Magnitud: longitud

Instrumento: equipo de espectroscopía electrónica de altas presiones

Método: determinar la intensidad de las señales correspondientes al agua en estado líquido o sólido a través de su señal característica dada por sus niveles electrónicos. Comparar estas señales entre si y con registros patrones para cuantificar.

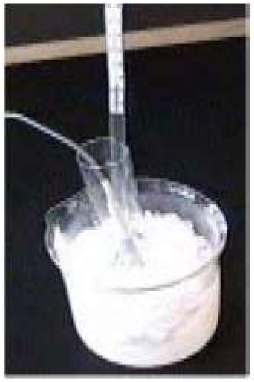
a) independiente del proceso
b) dependiente del sistema de unidades (ej, 0,00005 mm ó 50 nm ó 500 Å)

Cuestiones:

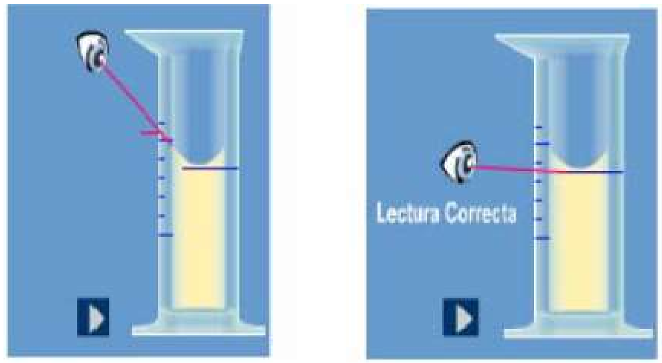
- ¿Influye de alguna manera el observador y el proceso de medición sobre el sistema a medir?
- ¿Existe un valor verdadero de la magnitud a medir?
- ¿Con cuántas cifras tiene sentido expresar el resultado?
- ¿Qué pasará si realizamos la medida varias veces?

¿Influye de alguna manera el proceso de medición en la magnitud a medir?

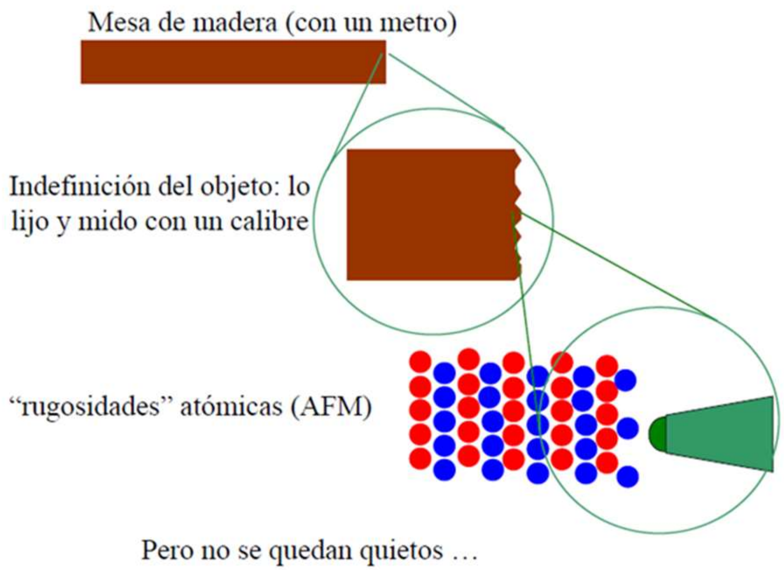
Modificación del sistema físico



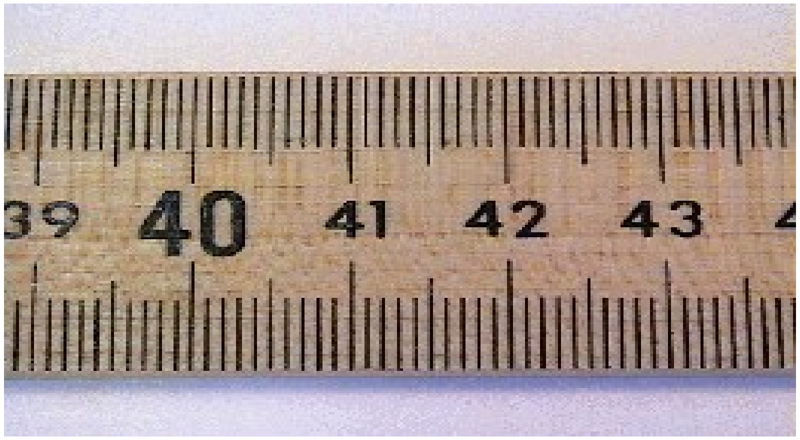
Paralaje

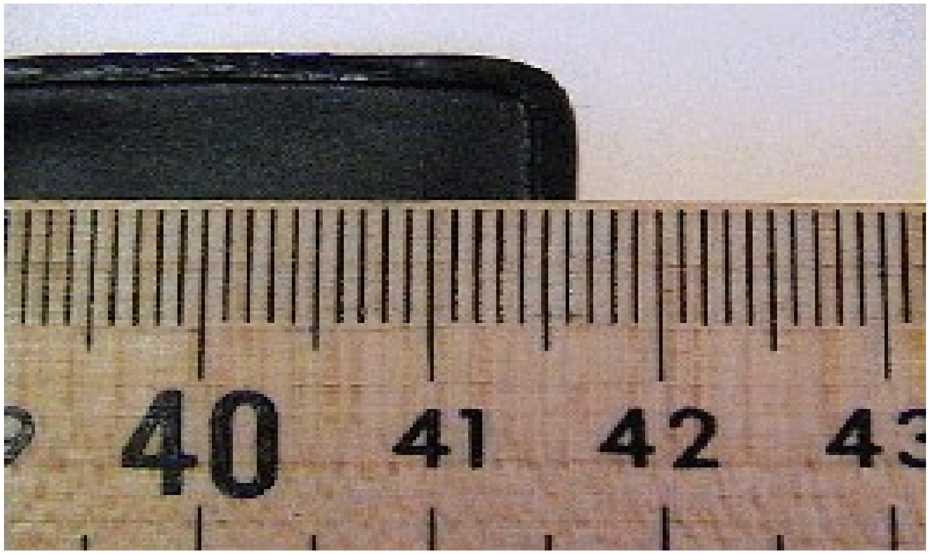


¿Existe un valor verdadero de la magnitud a medir?



¿Podemos medir el valor verdadero? (aún macroscopicamente)





(41,6 - 41,7) cm

Es el intervalo más pequeño que contiene el valor deseado

Incerteza de la medida

Los valores de las medidas no son simples números exactos sino que están comprendidos en un intervalo de valores en el cual dicho valor se encuentra:

$$x - \Delta x \leq x_m \leq x + \Delta x$$

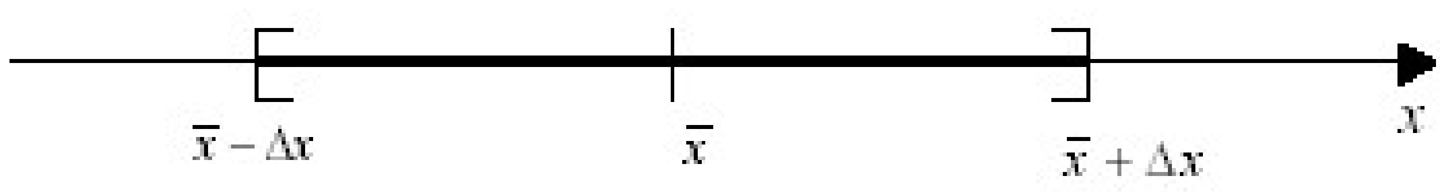
A Δx lo llamaremos incerteza *(incertidumbre)* de la medida.

INCERTEZA ABSOLUTA: ΔX

INCERTEZA RELATIVA: ΔX / X

INCERTEZA RELATIVA PORCENTUAL: 100 ΔX / X

¿Cómo se expresa el resultado incluyendo el intervalo de incerteza?



Resultado = ($\overline{X}$ $\pm$ ΔX) unidades

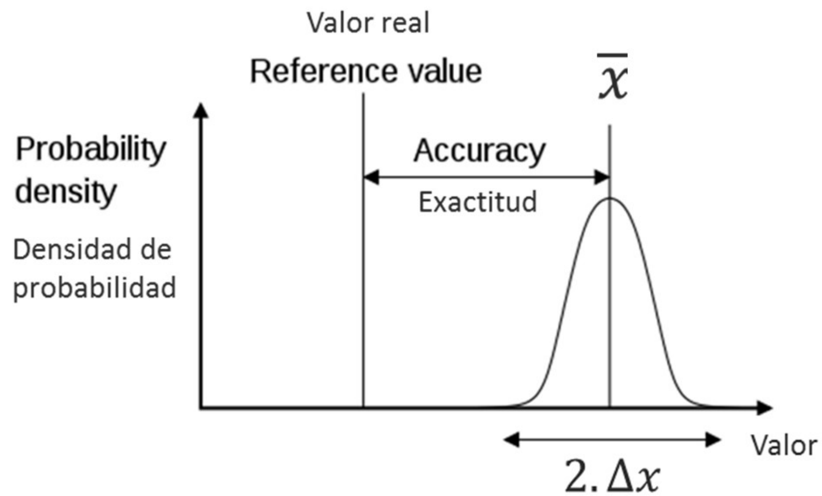
Para el ejemplo anterior en que el intervalo de "confianza" era (41,6 ; 41,7) cm

el resultado se expresa como: (41,65 ± 0,05) cm

$\bar{x}$: es lo que llamaremos el ***valor medio***, que representa el valor más probable de nuestra medición (esto se verifica para grandes números y está relacionado con teorías estadísticas).

¿Cómo se expresa el resultado incluyendo el intervalo de incerteza?

$$\text{Resultado} = (\ \overline{X} \pm \Delta X)\ \text{unidades}$$



Ej: si el resultado es: (21,65 ± 0,05) cm

La incerteza es 0,05

La incerteza relativa 0,002

La incerteza relativa porcentual 0,2 %

Factores que influyen en la magnitud de la incerteza:

- La mínima división que podemos resolver con algún método de medición (**incerteza de apreciación**)
- Falta de resolución (definición) del objeto a medir (**incerteza de indeterminación**)
- Interacción del instrumento con el objeto a medir (**incerteza de interacción**)
- Imperfección o mala calibración del instrumento (**error de calibración**)
- Fluctuaciones que no tienen origen evidente (**incertidumbres casuales o estadísticas – “artefactos”**)

¿Con cuántas cifras tiene sentido expresar el resultado?

Cifras significativas

Ej.: en general, cuando medimos con una regla graduada en milímetros podremos asegurar nuestro resultado hasta la cifra de los milímetros o una fracción del mm

$(95{,}5 \pm 0{,}5)$ mm ó (95 ± 1) mm

3 cifras significativas

2 cifras significativas

$\cancel{(95{,}21324 \pm 1)\ \mathrm{mm}}$

Se debe aproximar al primer dígito que afecta la magnitud del error.

Ejemplos:

Incorrectos	Correctos
$453 \pm 0,51$	$453,0 \pm 0,5$
$0,0237 \pm 0,01$	$0,02 \pm 0,01$
$5,897 \pm 0,028$	$5,99 \pm 0,03$
$56,789 \pm 0,138$	$56,79 \pm 0,15$
34567 ± 3427	34000 ± 3000
332 ± 120	300 ± 100

Introducción a la teoría de errores y análisis de datos

Nociones de errores:
- Precisión y exactitud
- Clasificación de errores
- Determinación de los errores de medición: tiempo de reacción, errores de apreciación
- Medidas directas e indirectas
- Tratamiento estadístico de datos: histogramas y distribución estadística
- Número óptimo de medidas
- Medidas independientes: discrepancia
- Medidas dependientes: propagación de errores

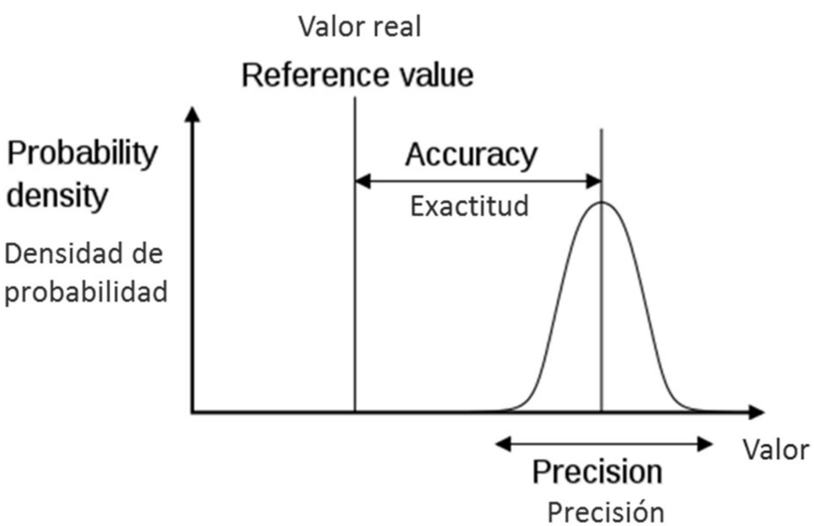
Análisis de datos:
- Análisis gráfico
- Ajustes numéricos (cuadrados mínimos)
- Criterios de evaluación para la bondad de los ajustes

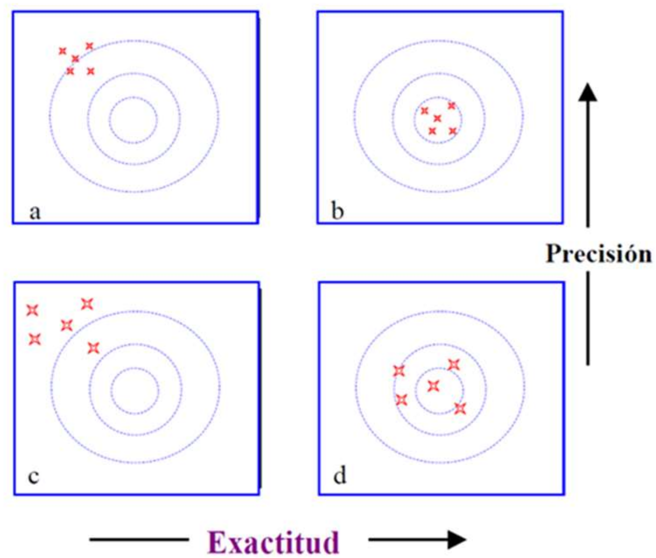
Exactitud y precisión

Las mediciones están afectadas de errores o incertidumbres de medición que provienen de las limitaciones impuestas por:

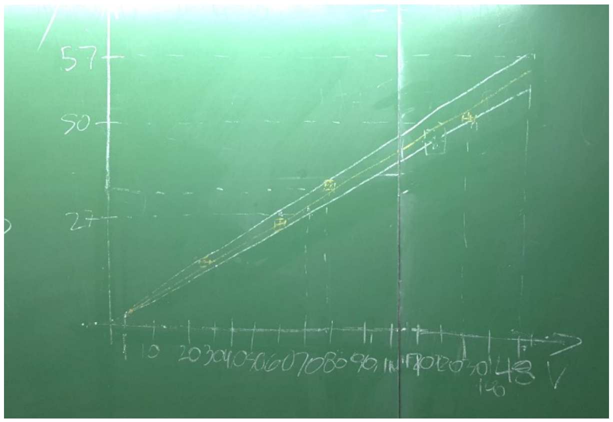
- la precisión y exactitud de los instrumentos usados,
- la interacción del método de medición con el sistema físico,
- la definición del objeto a medir,
- la influencia del observador u observadores que realizan la medición (tiempo de respuesta, apreciación, etc)

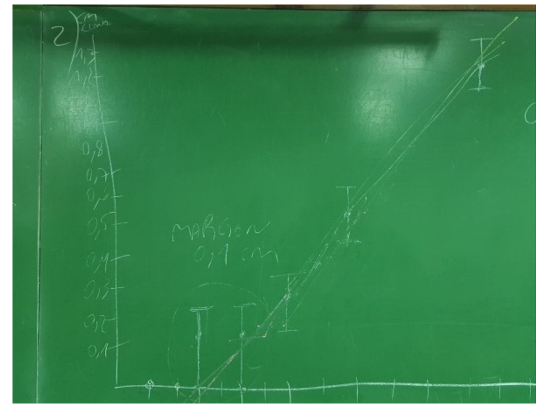
$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

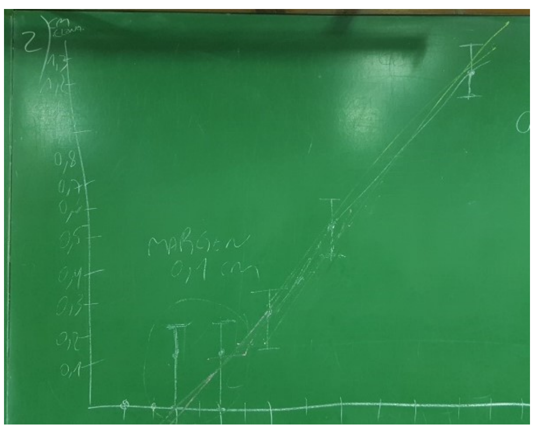


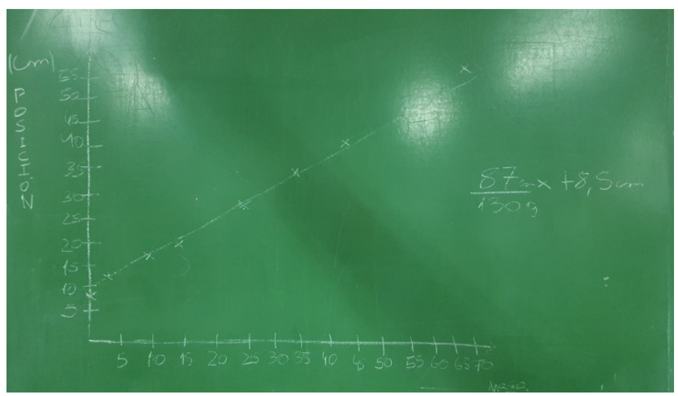


Resultados practica 1

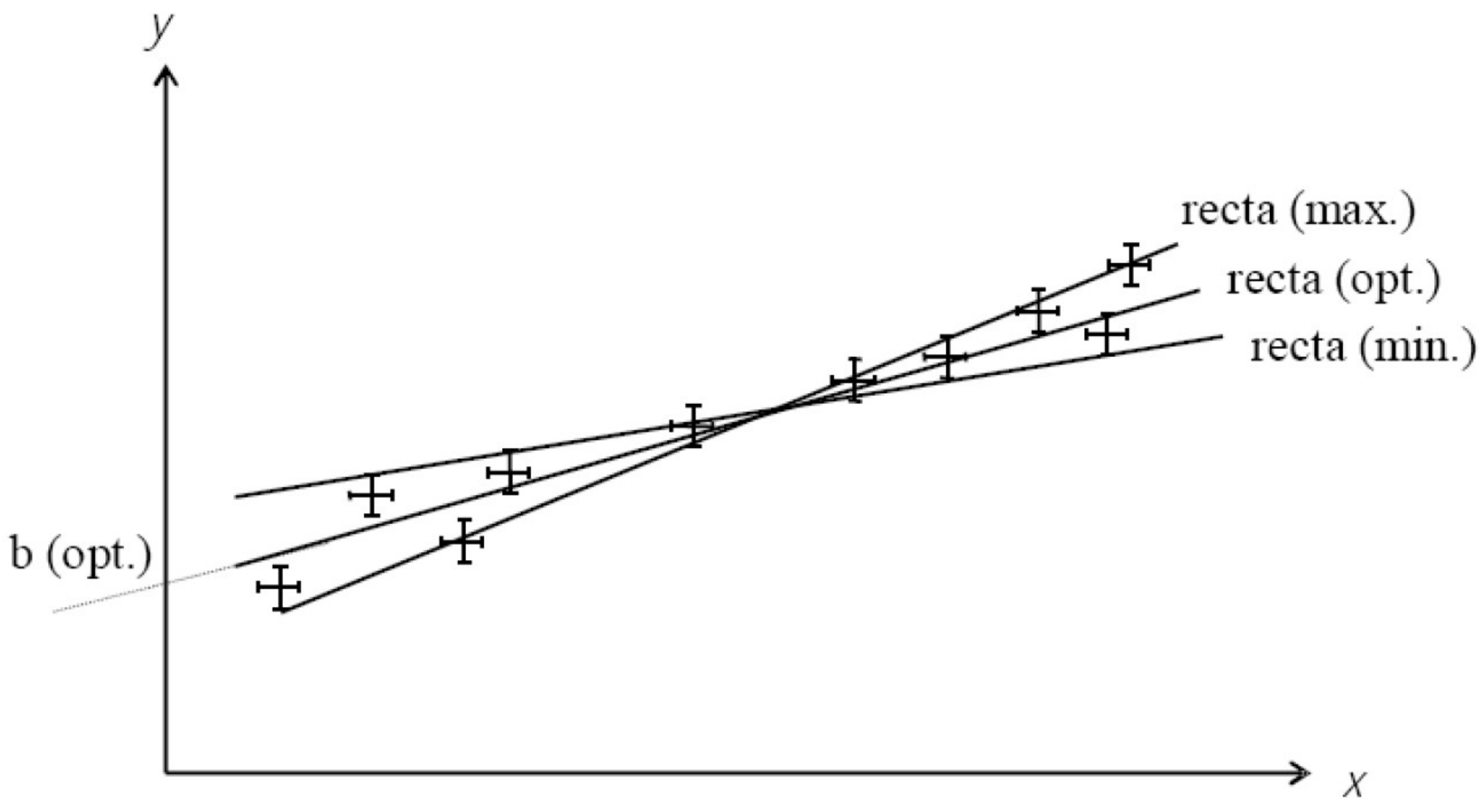








Método gráfico para determinar la recta que mejor se ajusta a los datos experimentales



Clasificación de los errores

Errores introducidos por el instrumento

- Error de apreciación
- Error de exactitud
- Error de interacción
- Falta de definición en el objeto sujeto a medición

Clasificación general de los errores

- Errores sistemáticos: se originan por las imperfecciones de los métodos de medición.
- Errores estadísticos: son los que se producen al azar. En general son debidos a causas múltiples y fortuitas.
- Errores espurios: son los que cometemos por equivocación o descuido.

$$\Delta x = \sigma_{def} = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{nom}^2} = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{ap}^2 + \sigma_{def}^2 + \sigma_{\text{int}}^2 + \sigma_{exac}^2 + \ldots}$$

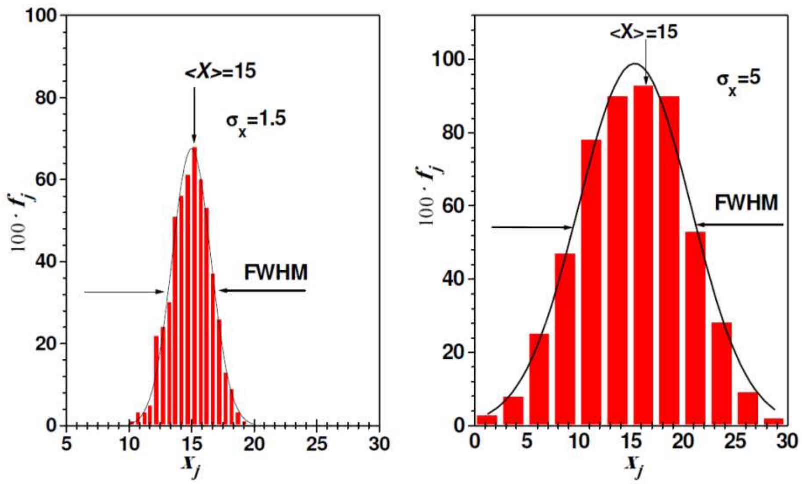
Histogramas y distribución estadística (discreta)

Una manera útil de visualizar las características de un conjunto de datos consiste en dividir el intervalo (xmin, xmax) en m subintervalos delimitados por los puntos (y1, y2, y3, ..., ym); a estos subintervalos los llamaremos "rango de clases". Seguidamente, contamos el número n1 de individuos de la muestra cuyas alturas están en el primer intervalo [y1, y2), el número nj de los individuos de la muestra que están en el j-ésimo intervalo [yj-1, yj), etc., hasta el m-ésimo subintervalo.

Con estos valores definimos la función de distribución fj que se define para cada subintervalo como: $$f_j = \frac{n_j}{\sum_j n_j}$$

Esta función de distribución está normalizada, es decir: $$\sum_{j=1}^{m} f_j = 1$$

El gráfico de fj en función de xj [xj = (yj-1 + yj)/2] nos da una clara idea de cómo se distribuyen las alturas de los individuos de la muestra en estudio. Este tipo de gráfico se llama histograma.



Histogramas y distribución estadística (discreta)

Tres parámetros importantes de una distribución son:

El valor medio: $$\bar{x} = < x > = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot f_j = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

La varianza: $$Var(x) = \sigma_x{}^2 = \sum_{j=1}^{m} (x_j - \bar{x})^2 \cdot f_j$$

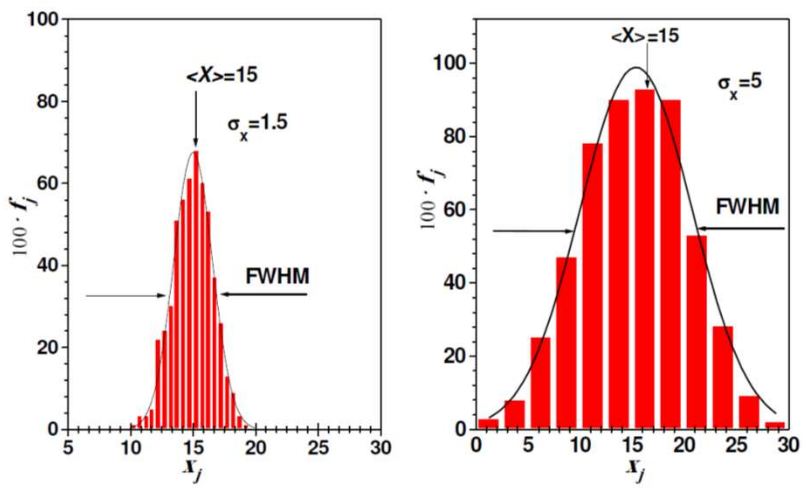
La desviación estándar: $$\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$$

El valor medio (también llamado media y promedio) <x> da una idea de la localización del centro de masa (centroide) de la distribución. La desviación estándar sx es una medida de la dispersión de los datos alrededor del promedio. Cuando más concentrada esté la distribución de valores alrededor de <x>, menor será sx, y viceversa.

Histogramas y distribución estadística (contínua)

Una distribución de probabilidad muy común en diversos campos es la distribución gaussiana o normal, que tiene la forma de una campana como se ilustra en la trazo continuo en figura. La expresión matemática de esta distribución es:

$$f(x) = N(x; m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Media, mediana y moda

Los parámetros más usuales con los que puede caracterizarse la localización de una distribución asociada a un conjunto de N datos son:

a) la media
b) la mediana
c) la moda

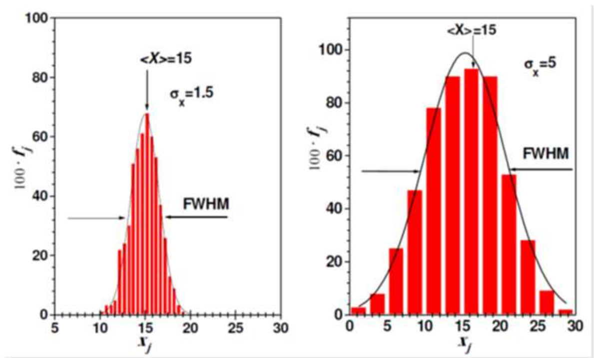
La moda corresponde al valor de la variable donde está la máxima frecuencia, o sea, que en un histograma la moda corresponde al valor de la variable donde hay un pico o máximo.

La mediana es el valor de la variable que separa los datos entre aquellos que definen el primer 50% de los valores de los de la segunda mitad. O sea que la mitad de los datos de la población o muestra están a derecha de la mediana y la otra mitad están a la izquierda de la misma.

Mientras que a la media la calculamos usando una fórmula, a la moda la evaluamos directamente del histograma.

Media, mediana y moda

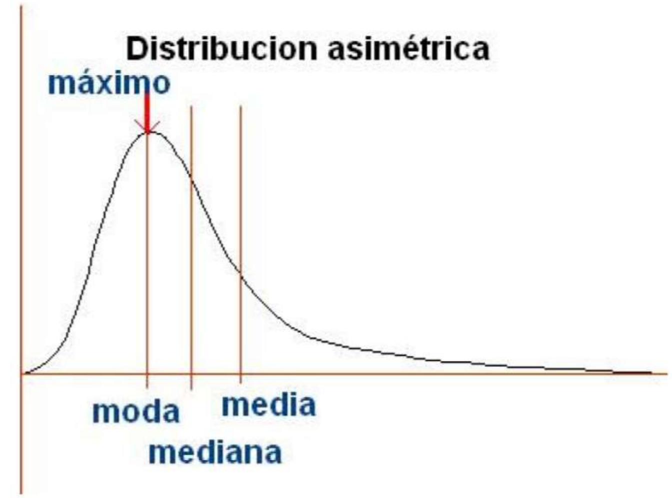
Para estimar la mediana tenemos que observar la lista de datos ordenados de menor a mayor, y ubicar el valor central de la lista. Si el número de datos es impar, la mediana corresponde precisamente al valor central. Si el número N de datos es par, la mediana se estima como ½ (XN/2 + XN/2+1). En una distribución dada, una línea vertical trazada desde la mediana divide a la distribución en dos partes de área equivalentes.



La "campana de Gauss" está centrada en m y su ancho está determinado por la desviación estándar s. Los puntos de inflexión de la curva están en x−s y x+s . El área de esta curva entre estos dos puntos constituye el 68.3% del área total. El área entre x−2s y x+2s es del 96% del total. Es útil caracterizar para esta función el ancho a mitad de su altura, que está relacionado con s a través de la expresión: FWHM = 2.35s (FWHM, de "full width half maximum"). Cuando se desea comparar un histograma no normalizado con una curva normal, es necesario contar el número total de datos Nt, el valor medio de los mismos, x , y la desviación estándar de los datos, sx. Para comparar el histograma con la curva normal debemos multiplicar la distribución dada por la Ec. (2.6) por un factor Nt..Dx, donde Dx es el ancho del rango de clases que suponemos idéntico para cada intervalo.
Aunque la distribución gaussiana ocurre naturalmente en muchos procesos, desde luego no es única y existen muchos tipos de distribuciones de ocurrencia común en la naturaleza.

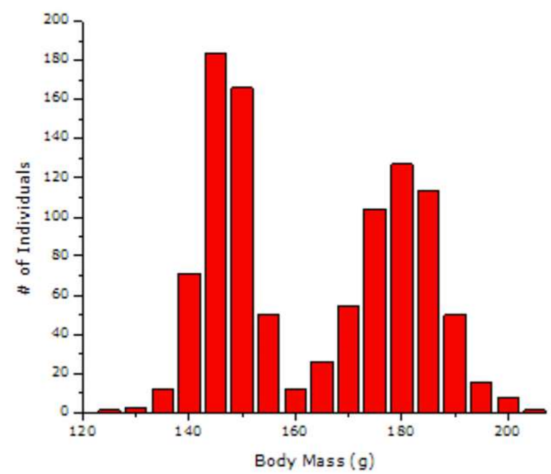
Media, mediana y moda

Media, moda y mediana no tienen, en general, porqué coincidir. Estos tres parámetros sí son iguales en el caso de distribuciones unimodales simétricas respecto del valor medio. Este es el caso de una distribución gaussiana. En el caso de una distribución asimétrica, las diferencias entre moda, media y mediana pueden ser sustanciales.



Es importante saber cuál parámetro de localización es más apropiado de usar o más representativo en una dada situación.

Si una distribución tiene dos máximos la denominamos distribución bimodal, si tiene tres máximos trimodal y así sucesivamente.



Magnitud que se mide N veces

Supongamos que hemos hecho N mediciones de una misma magnitud con resultados j N x1, x2,..., x ,...x . Estas N determinaciones pueden ser consideradas una muestra de todas las posibles mediciones que se podrían realizar (población). Bajo condiciones muy generales puede demostrarse que el mejor estimador de la magnitud x viene dado por el promedio de los valores:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j}{N} .$$

Definimos la **desviación estándar** o desviación cuadrática media de cada medición, Sx:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2}{N-1}} ,$$

Siendo la desviación de cada medición respecto de x .

$$\Delta x_j = x_j - \bar{x} \qquad j = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}$$

Se puede probar que a medida que el número N de mediciones aumenta, la distribución de x será normal con una desviación estándar dada por:

$$\sigma_{est} = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2}{N.(N-1)}} = \frac{Sx}{\sqrt{N}} .$$

σx se llama la **desviación estándar del promedio** y en un experimento es una medida de la incertidumbre estadística asociada a x en el proceso de medir la magnitud N veces.

Número óptimo de mediciones

σest disminuye al aumentar N, pero desde un punto de vista físico, solo tiene sentido que disminuya hasta hacerse igual o del orden que σnom, que está determinado por el instrumental y el método de medición.

El balance óptimo se logra cuando σest ≈ σnom. Esto nos da un criterio para decidir cual es el número óptimo de mediciones a realizar. Como suponemos que Sx es independiente de N, la idea es hacer un número finito de mediciones preliminares y luego calcular Sx.

$$N_{op} \approx \left(\frac{S_x}{\sigma_{nom}} \right)^2$$

El error combinado o efectivo vendrá dado por:

$$\Delta x^2 = \sigma_{ef}^2 = \sigma_{nom}^2 + \sigma_x^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{\sigma_{nom}^2 + \sigma_x^2}\ .$$

Métodos cuantitativos de análisis gráfico

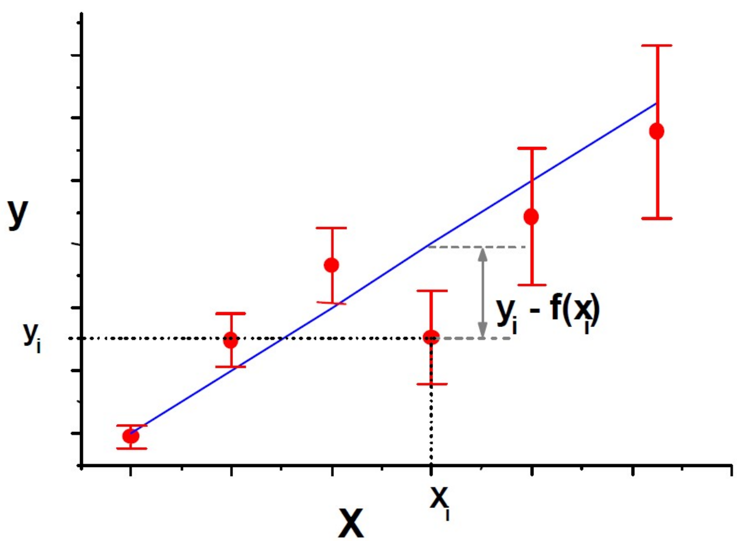
Método de cuadrados mínimos.
Regresión lineal.
Función $\chi 2$.
Obtención de los parámetros de un modelo.
Correlación lineal.
Incertidumbre de los parámetros de un ajuste.

Ajustes por cuadrados mínimos y criterios de evaluación.

Sea el caso de un resorte y su estiramiento dado por el modelo:

$$F = -k \cdot x$$

Donde F es la fuerza elástica y ***x*** la elongación del resorte.
Para determinar *k* se procede a cargar al resorte con diferentes pesos *P* y medir la elongación que producen:



MODELO LINEAL:
La cantidad yI - f(xi) representa la desviación de cada observación de yi respecto del valor predicho por el modelo f(xi).

Definimos la cantidad $\chi 2$ como:

$$\chi^2 = \sum_i \left(P_i - k \cdot x_i\right)^2$$

$\chi 2$ es una medida de la desviación total de los valores observados Pi respecto de los predichos por el modelo kxi. El mejor valor de k es aquel que minimiza esta desviación total.

Eleccion más conveniente de la variable independiente: y = P

Ajustes por cuadrados mínimos y criterios de evaluación.

El mejor valor de k será el que se obtiene de resolver la siguiente ecuación (minimizando el valor de $\chi 2$):

$$\frac{d\chi^2}{dk} = \frac{d}{dk}\sum_i (P_i - k\cdot x_i)^2 = 2\cdot\sum_i [(P_i\cdot x_i) - k\cdot(x_i)^2] = 0\,,$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\sum_i P_i\cdot x_i}{\sum_i x_i}$$

Para un modelo lineal que incluya una ordenada al origen:

$$y = a\cdot x + b$$

$$\chi^2 = \Sigma_i \left(y_i - a\cdot x_i - b\right)^2$$

Para obtener los parámetros a y b se requiere minimizar la función respecto de ambos parámetros, es decir:

$$\frac{d\chi^2}{da} = 0$$

Además:
Método de cuadrados mínimos incluyendo errores
Regresión no lineal

$$\frac{d\chi^2}{db} = 0$$

Protocolo para análisis de errores

1. Se analizan posibles fuentes de errores sistemáticos y se trata de minimizarlos

2. Se estima la incertidumbre nominal σnom

3. Se realizan unas 5 a 10 mediciones preliminares y se determina la desviación estándar de cada medición Sx.

4. Se determina el número óptimo de mediciones Nop

5. Se completan las Nop mediciones de X

6. Se calcula el promedio X y la incertidumbre estadística sx

7. Se evalúa la incertidumbre absoluta de la medición combinando todas las incertidumbres involucradas (error efectivo)

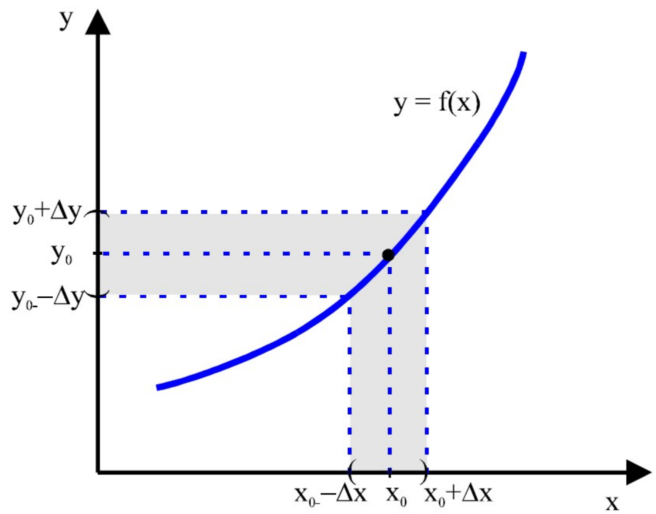
8. Se expresa el resultado en la forma X = X ± ΔX con la unidad correspondiente, cuidando que el número de cifras significativas sea el correcto.

9. Es útil calcular e indicar la incertidumbre porcentual relativa de la medición ex=100* ΔX / X , lo que puede servir en comparaciones con resultados de otras experimentadores o por otros métodos.

10. Si se desea estudiar la distribución estadística de los resultados (por ejemplo si es normal o no), se compara el histograma de la distribución de los datos experimentales con la curva normal correspondiente, es decir con una distribución normal de media X y desviación estándar Sx.

Funciones de varias variables. Medidas indirectas

Para el caso de determinar el valor de "x", la incerteza en "x" se "propaga" en "y" de acuerdo a la relacion *y=f(x).*



Se verifica que: $$\Delta y = \frac{dy}{dx}\,\Delta x$$

Veremos que, en general (para dependencia de varias variables) la varianza de una medida es:

$$V = V(x, y, z, \ldots), \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \cdot \Delta z^2 + \cdots}$$

Definiciones

Derivada parcial de una función de varias variables.

Consideremos *f = f(x,y),* las derivadas parciales de f se expresan y determinan como:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Así, para funciones de tres o más variables, por ejemplo, para una función de tres variables w = f(x,y,z) sus tres derivadas parciales son:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y,z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y,z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$$

Definiciones

Diferencial de una función de varias variables.

Sea una función de dos variables *z = f(x, y)*, se define la diferencial de esta función como:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Geométricamente se puede interpretar las diferenciales como "incrementos infinitesimales".

Esto tiene relación con la variación del error total pero no con la varianza.

Así, para funciones de tres o más variables, por ejemplo, para una función de tres variables w = f(x,y,z) sus tres derivadas parciales son:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Propagación de la incerteza

En general (para dependencia de varias variables): aproximación de primer órden para la varianza de una medición

$$V = V(x, y, z, \ldots), \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \cdot \Delta z^2 + \cdots}$$

$$\frac{\partial V(x, y, z, \ldots)}{\partial x}$$

representa la variación parcial de *V* para cuando solamente varía x y el resto de las variables permanece fijo.

Para poder determinar la variación parcial y determinar la propagación del error en V a partir del error de la determinación de las variables independientes es necesario conocer **la dependencia funcional entre V y dichas variables de forma explícita**.

Para determinar las variaciones parciales hay que realizar las derivadas parciales y luego evaluar ΔV en función de Δx, Δy, Δz, etc.

Esta expresión para ΔV constituye una aproximación, la que resulta válida en la medida que las variables no estén correlacionadas o la correlación sea despreciable en términos de lo que representa numéricamente en la evaluación del error total.

Propagación de la incerteza

$$V = V(x, y, z, \ldots), \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \cdot \Delta z^2 + \cdots}$$

Dada la función: $X = f(A, B, C, \ldots)$

El Error Absoluto resulta: $$\Delta X = \left|\frac{\partial f}{\partial A}\right| \cdot \Delta A + \left|\frac{\partial f}{\partial B}\right| \cdot \Delta B + \left|\frac{\partial f}{\partial C}\right| \cdot \Delta C + \cdots$$

Mientras que la Varianza es: $$\sigma_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\sigma_B\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\sigma_C\right)^2 + \cdots$$

Estrictamente (sin aproximaciones) es: $$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + 2\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b}COV_{ab}.$$

Donde $2\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b}COV_{ab}.$ es la covarianza entre a y b.

Ejemplos:

Para una función potencial de variables separables de la forma:

$$V(x,y,z) = a.\frac{x^n.y^m}{z^l}$$

Con a, n, m y l constantes.

La varianza resulta:

$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{n^2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + m^2 \cdot \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + l^2 \cdot \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2}$$

Para: $Z = x \pm y$ es: $(\Delta Z)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

Cálculo de derivadas parciales

Función	Función derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$
$\begin{cases} y = g(u) \\ u = h(x) \end{cases}$	$y' = y'_u \cdot u'$
$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{cases}$	$y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
$y = ku$	$y' = ku'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \operatorname{sen} a$	$y' = (\cos u)u'$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ \sec^2 x \end{cases}$

Función	Función derivada
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = ku$	$y' = ku'$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = uvw$	$y' = u'vw + uv'w + uvw'$
$y = \dfrac{u}{k}$	$y' = \dfrac{u'}{k}$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
$y = a^u$	$y' = a^u u' \ln a$
$y = u^v$	$y' = vu^{v-1}u' + u^v \cdot v' \ln u$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \cos u$	$y' = -(\cos u)u'$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = \begin{cases} -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\ -(1+\cos^2 x) \\ -\cos c^2 x \end{cases}$

Ejemplos	
$y = 5$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = (5x - 1)^4$	$y' = 20\,(5x - 1)^3$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{2x+3}$	$y' = 2e^{2x+3}$
$y = L\,(5x + 3)$	$y' = \dfrac{5}{5x + 3}$
$y = 5x^3$	$y' = 15x^2$
$y = x^3 + 5x^2 - 7x$	$y' = 3x^2 + 10x - 7$
$y = x^2e^{3x}$	$y = 2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}$
$y = \dfrac{e^{5x}}{x}$	$y' = \dfrac{5xe^{5x} - e^{5x}}{x^2}$

Regla de la cadena: $$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$