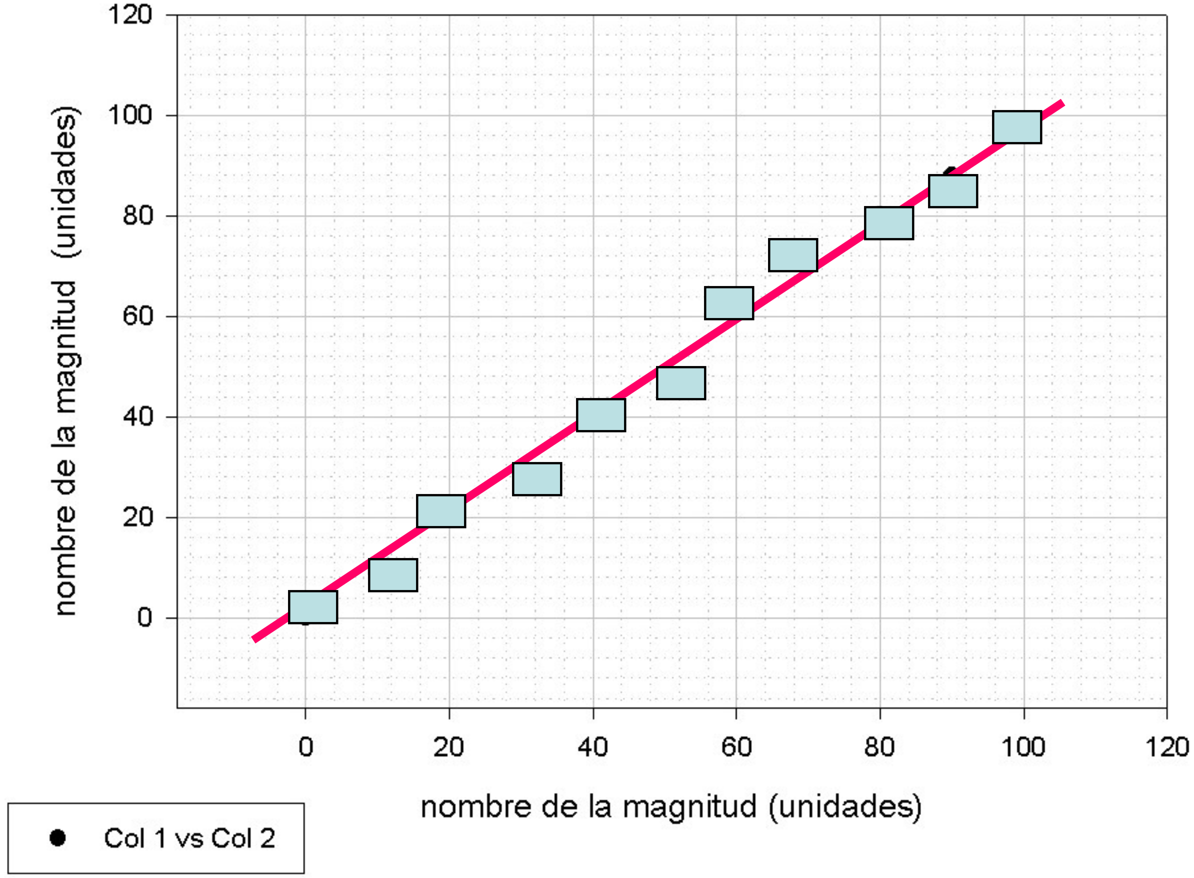
Análisis gráfico y analítico

Física Experimental 2016

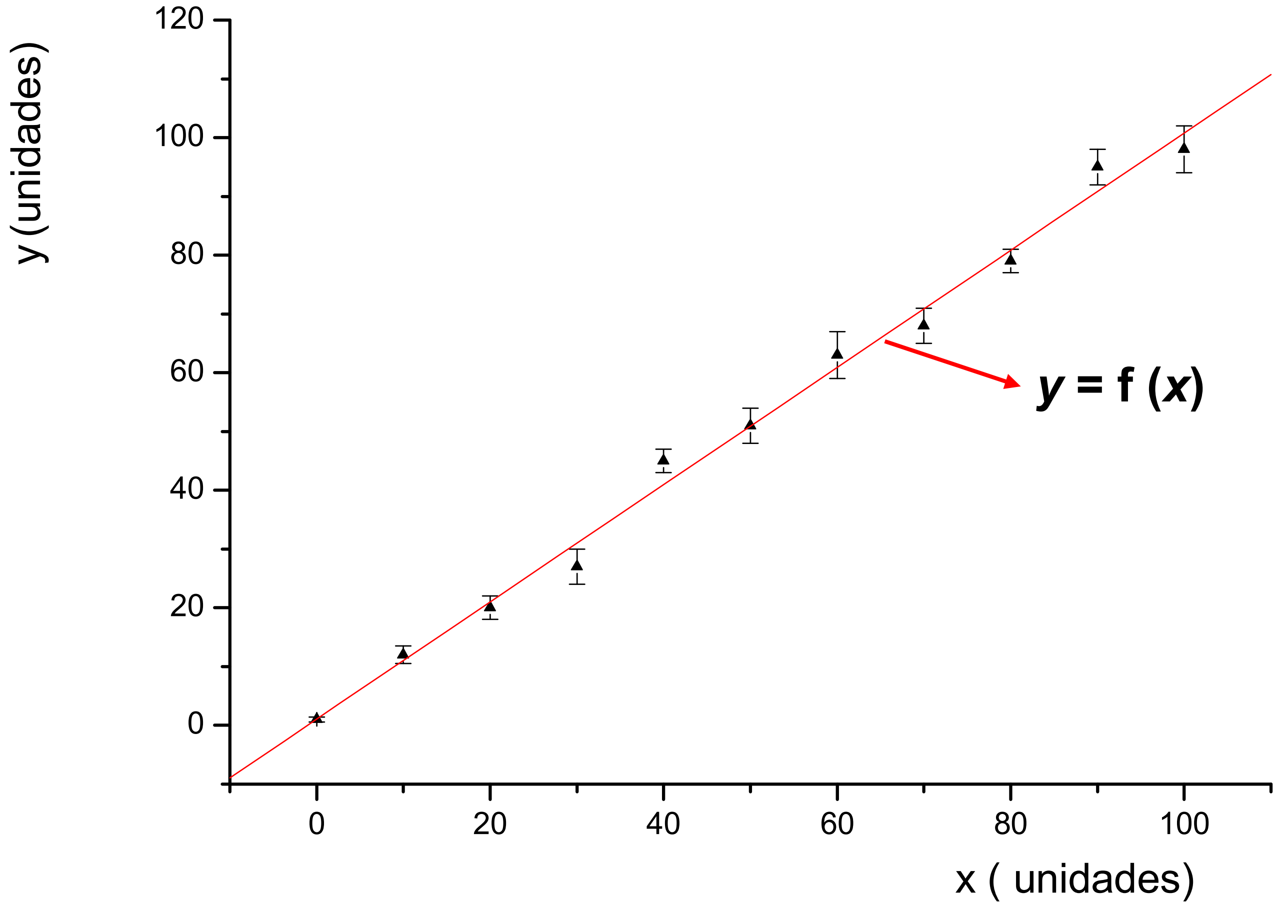
$y = mx+b$

m: pendiente de la recta

b: ordenada al origen

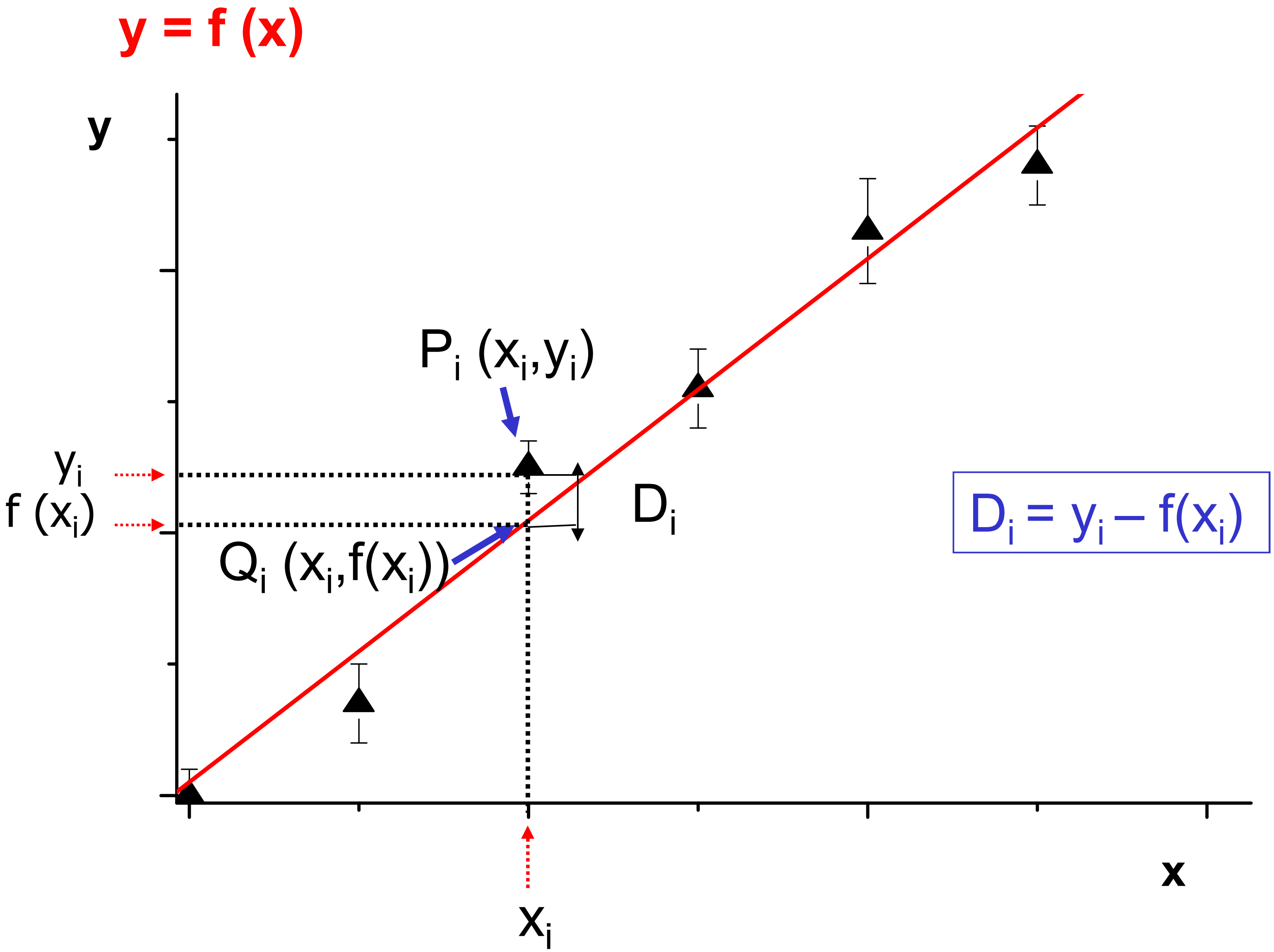


AJUSTE ANALÍTICO



¿Cómo se encuentra analíticamente *y* = f(*x*)?

Aumentando una región del gráfico:



Definimos:

$$\chi^2 = \sum D_i = \sum_i \, [\, f(x_i) - y_i \,]^2$$

χ^2 **(chi-cuadrado)**

Se busca mininizar χ^2 $\Longrightarrow$ método de cuadrados mínimos

Cuadrados mínimos:
algoritmo matemático que nos permite obtener las constantes que definen la "mejor función". Por ej. en el caso de la recta *m* y *b*.

$$y = f\,(x) = m\,x + b$$

$$\chi^2 = \sum D_i = \sum_i \, [\, m\,x_i + b - y_i \,]^2$$

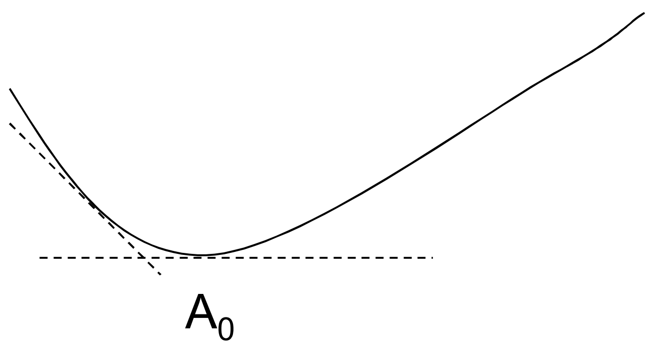
f(x_i)

Valor medido

Condiciones para hallar el mínimo de una función respecto de una variable

La derivada primera de la función respecto de la variable debe ser igual a 0 para el valor de la variable A que minimiza la función (A_0)

$$df/dA|_{A0} = 0$$



El valor de la derivada segunda de la función para A_0 debe ser mayor que cero (positiva, cóncava hacia arriba)

$$d^2f/dA^2|_{A0} > 0$$

$$\chi^2 = \sum [m\, x_i + b - y_i]^2$$

Queremos encontrar los valores de m y b que hacen mínimo χ**2**

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$$

Un breve ejercicio algebraico nos permite obtener los valores de la pendiente y la ordenada al origen de la “mejor recta”:

$$m = \frac{N\sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^{\,2} - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum x_i^{\,2} \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{N\sum x_i^{\,2} - \left(\sum x_i\right)^2}$$

La expresión para χ^2 puede generalizarse para cualquier otra función:

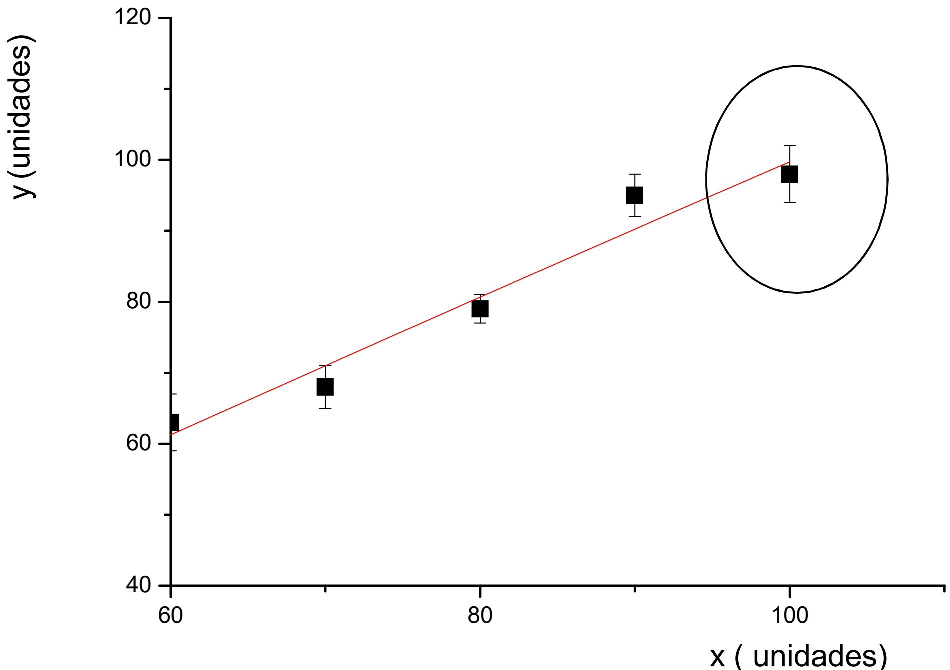
$$\chi^2 = \sum [f(x_i) - y_i]^2$$

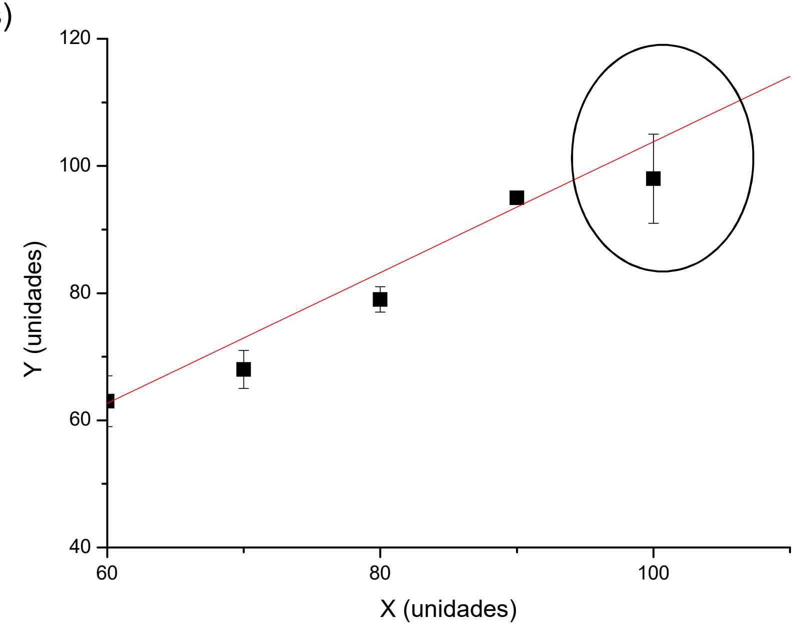
Supongamos que las incertidumbres son diferentes punto a punto y llamemos σ_i a la asociada a y_i.

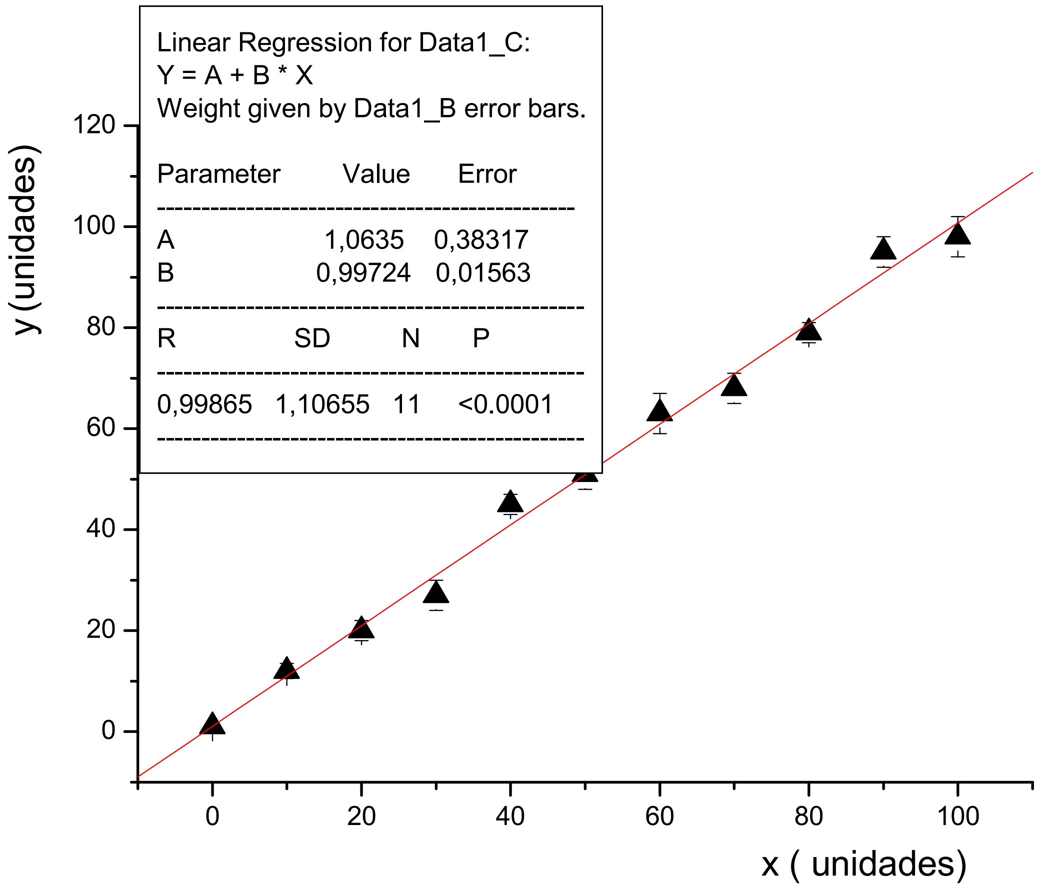
En este caso definimos χ^2 como:

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(f(x_i) - y_i\right)^2}{\sigma_i^{\,2}} = \sum w_i \left(f(x_i) - y_i\right)$$

Dónde los $w_i = 1/\sigma_i^2$ son los factores de peso


120
100
80
60
40
y (unidades)
60
80
100
x (unidades)


120
100
80
60
40
Y (unidades)
60
80
100
X (unidades)



x	y	y-err
0	1	0,4
10	12	1,5
20	20	2
30	27	3
40	45	2
50	51	3
60	63	4
70	68	3
80	79	2
90	95	3
100	98	4

Qué es R?

Para definir R, primero vamos a definir el **Chi reducido (o varianza del ajuste)**

$$\chi_{\mathrm{f}}^2 = \frac{1}{N - n_p} \sum (f(x_i) - y_i)^2$$

n_p= número de parámetros de la función f

(por ejemplo si es una recta, n_p=2)

N = número total de medidas

Y el **Chi total (o varianza total):**

$$\chi_{\mathrm{t}}^2 = \frac{1}{N - 1} \sum (\bar{y} - y_i)^2$$

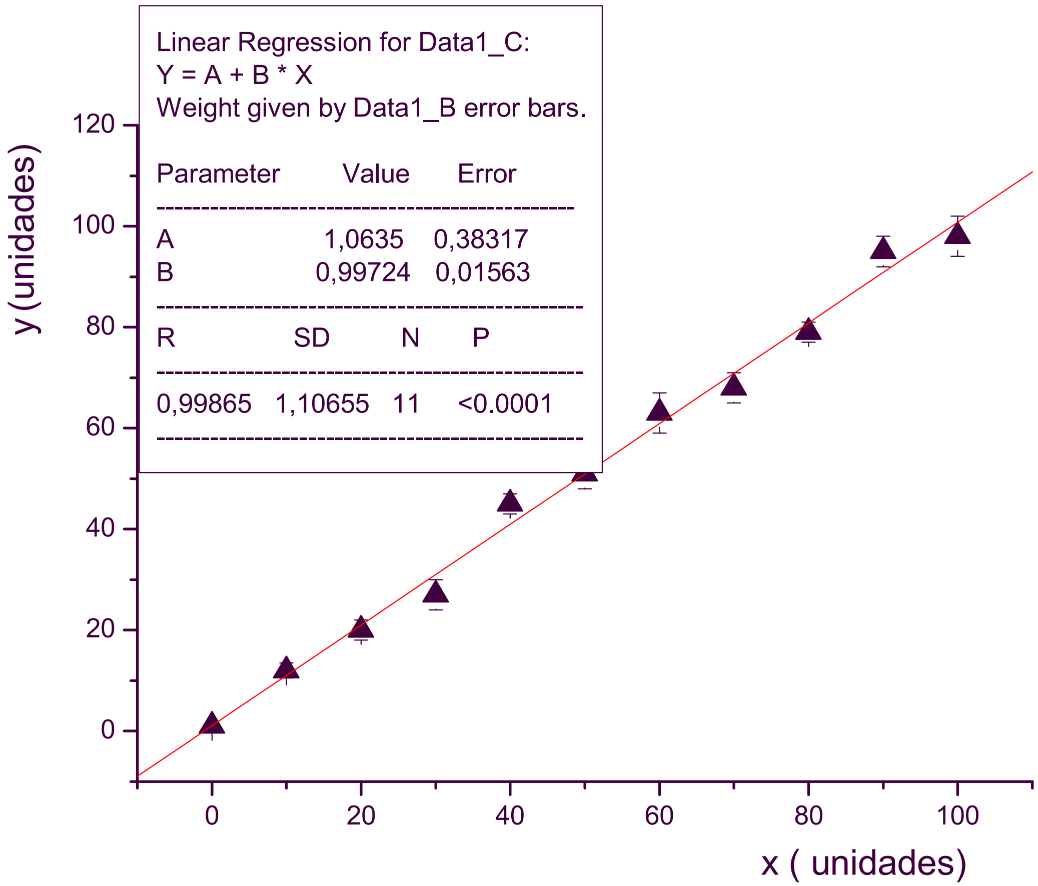
Se define **R (coeficiente de regresión):**

$$R^2 = \left(\frac{\chi_t^{\ 2} - \chi_f^{\ 2}}{\chi^2{}_t} \right)$$

Si el modelo **f (x)** en una ***buena*** representación de los datos, es de esperar que tanto χ como χ_f sean pequeños y que:

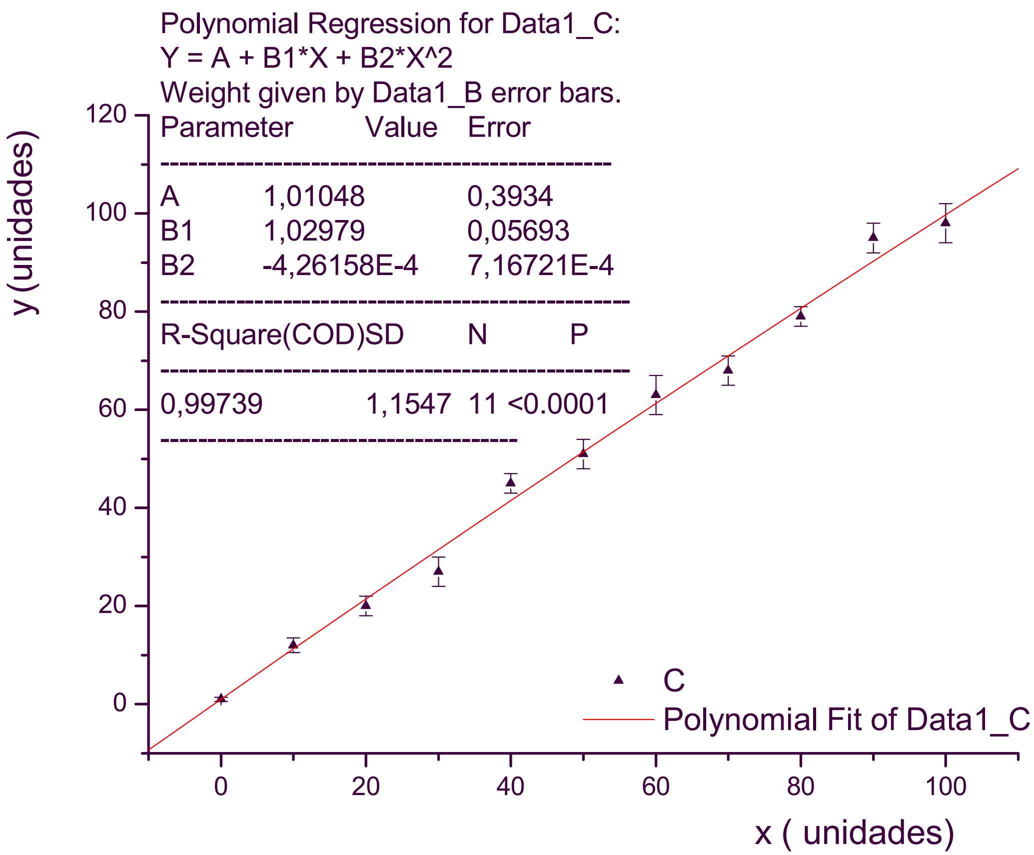
$\chi_t >> \chi_f$ entonces **R~1**

Por esto, la mejor representación será aquella que de los valores de **R más próximos a 1**.



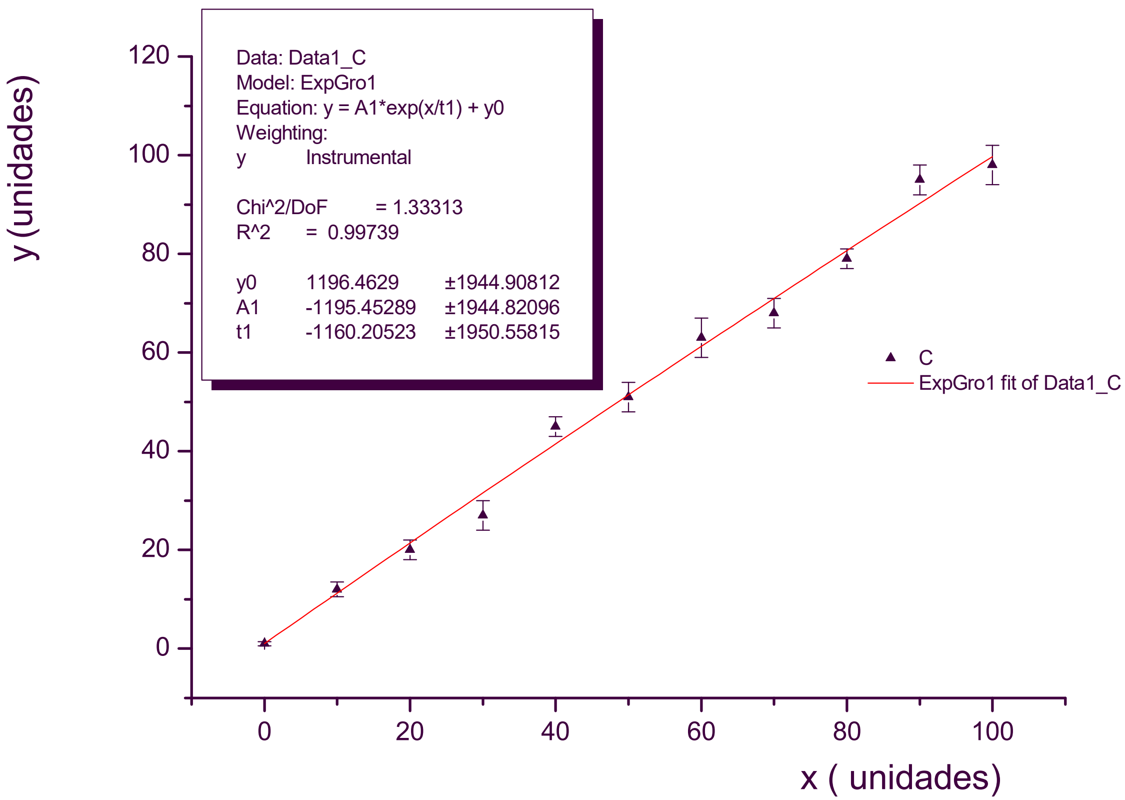
Función lineal:

R = 0,99865



Función cuadrática:

R = 0,99739



Función exponencial:

R = 0,99739

¿Y si se tiene más de una variable?

$\chi^2 = F(A,B) \Longrightarrow \partial\chi^2/\partial A$ y $\partial\chi^2/\partial B$

$\partial(\sum [A\, m_{1i} + B - m_{2i}]^2)/\partial A = 0$; $\partial(\sum [A\, m_{1i} + B - m_{2i}]^2)/\partial B = 0$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas