

MEDICIONES: SU INTERPRETACION Y PRESENTACION

**Conceptos Básicos para la realización de experiencias de
laboratorio**

Prof. Dra. Graciela Punte

La esencia de la ciencia, casi su definición, es la siguiente:

La prueba de todo conocimiento es la experimentación. La experimentación es el *único juez* de una "verdad" científica. Pero, ¿cuál es la fuente del conocimiento? ¿De dónde provienen las leyes a ser verificadas?

La experimentación, en sí misma, ayuda a desarrollar esas leyes, en el sentido que nos sugiere pistas a seguir. Pero también se necesita *imaginación* para crear a partir de esas pistas las grandes generalizaciones – para adivinar cuáles son las regularidades que subyacen, maravillosas, simples, pero muy extrañas, y para experimentar y comprobar nuevamente si hemos hecho o no la conjetura correcta.

Richard Feynman

FISICA EXPERIMENTAL

La Física estudia fenómenos, procesos y la estructura de la materia, comprende un número limitado de teorías, número que en la actualidad se busca reducir. Estas teorías permiten explicar la mayor variedad posible de fenómenos observados y proponer, y/o predecir el resultado de, nuevos experimentos.

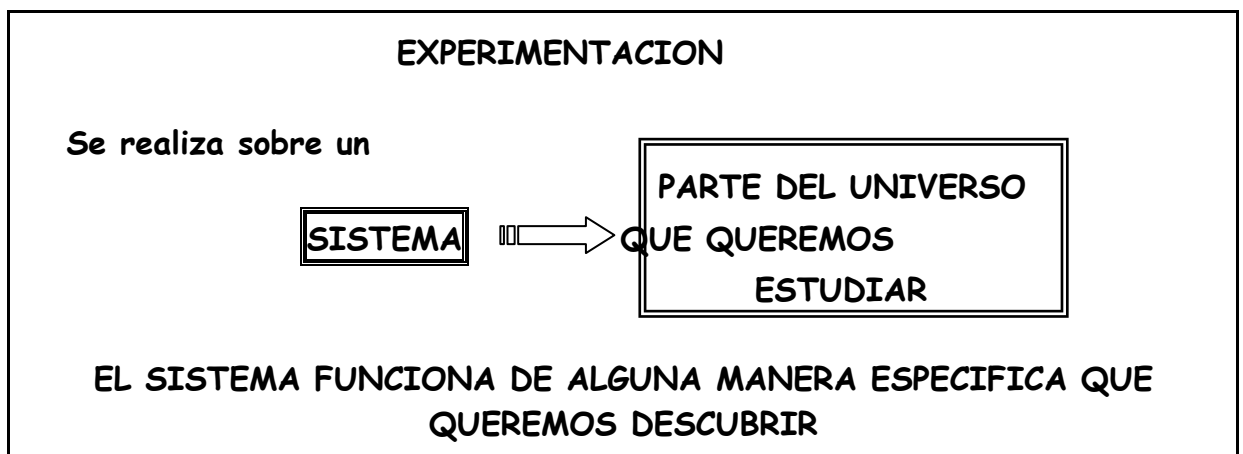
Para entender Física necesitamos poder conectar la descripción teórica con la observación experimental de la naturaleza. Esta conexión se realiza a través de medidas cuantitativas. Por lo tanto gran parte del entendimiento de la Física implica el conocimiento de cómo medir o cómo habría que hacer las medidas y cuán confiables son los resultados de las mismas.

I. INTRODUCCION A UN EXPERIMENTO

I.1 MODELOS

Siempre que nos planteamos alguna situación física, ya sea para analizarla con lápiz y papel o para realizar una experiencia, tenemos una representación interior, explícita o implícita, del **sistema físico** que estamos examinando y de su frontera. Antes de continuar vamos a aclarar que entendemos por sistema físico a la porción del universo que nos interesa estudiar. Cuando realizamos un experimento la imagen, mental o visual que tenemos del sistema en estudio, a la que llamamos **modelo**, nos puede servir para entender el estado o cambios de estado del sistema que estamos considerando. El modelo describe las propiedades y el espacio de estados posibles de nuestro objeto de estudio.

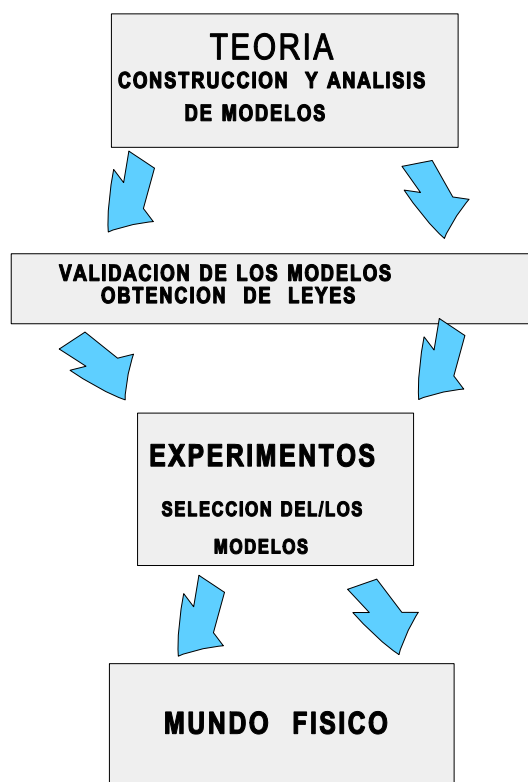
Esquema 1 (transparencia 2)



Los modelos nos pueden ayudar a encontrar distintos caminos para llevar a cabo la experimentación o pueden indicarnos la necesidad de diseñar nuevas experiencias. Estas pueden favorecer, o facilitar, la verificación de la interpretación que se ha hecho del sistema en estudio, de su respuesta frente a las interacciones tanto las que se dan naturalmente con su entorno como las interacciones programadas por el observador. Sin embargo, y eso es muy importante tenerlo presente, el modelo previo puede influir en nuestra percepción correcta o incorrecta de la realidad.

En el quehacer científico los modelos son representaciones concretas de **teorías** más o menos

abstractas. Siguiendo a Vucetich¹ entendemos por **teoría** a: "un conjunto de proposiciones ligadas entre sí por la relación de deducción (relación lógica)" y por proposición a "un conjunto de oraciones escritas en lenguaje lógico que tienen todas igual valor de verdad". El gran juego que vamos a jugar es modelar el mundo real y para hacerlo tenemos que descubrir y entender las reglas que hay que seguir para jugar ese juego. En general va a ser importante poder distinguir entre el modelo y la teoría que lo sustenta y sobre todo distinguir entre el modelo, o teoría, y el fenómeno o sistema real en sí mismos. Ningún modelo es perfecto, ni tiene validez universal. La experimentación nos puede decir si es válido para el sistema o fenómeno en análisis, sin embargo una experiencia posterior, planificada mejor, realizada con distintos instrumentos, etc. puede llevar a invalidarlo en forma total o parcial o indicar la necesidad de reducir sus límites de validez. Es decir puede llevar a introducir cambios en el modelo y en la teoría que lo sustenta, ver esquema 2 (transparencia 3). Al enfrentar una situación o fenómeno es importante tener en claro cuál es el modelo que uno tiene del mismo y tener el suficiente espíritu crítico como para no anteponer dicha creencia o preconcepción a las evidencias experimentales².



Las **leyes** son "las relaciones existentes entre las diversas magnitudes que intervienen en un fenómeno"³. También, de acuerdo con Vucetich⁴, podemos decir que una ley es una restricción en el conjunto de estados posibles del sistema y que puede enunciarse como una proposición (ecuación lógica) o como una función matemática. Las leyes pueden surgir de la experiencia y luego enmarcarse dentro de una teoría o aparecer como consecuencia de la teoría. Para poder tener la categoría de ley una relación debe ser válida para un conjunto amplio de observables, es decir de magnitudes medibles. Las leyes físicas **describen** el comportamiento de la naturaleza, no nos dicen cómo ésta debe comportarse. Por lo tanto sólo podemos hablar de ley cuando la afirmación ha sido suficientemente comprobada y se comprende claramente el rango de validez de la misma.

Esquema 2 (transparencia 3).

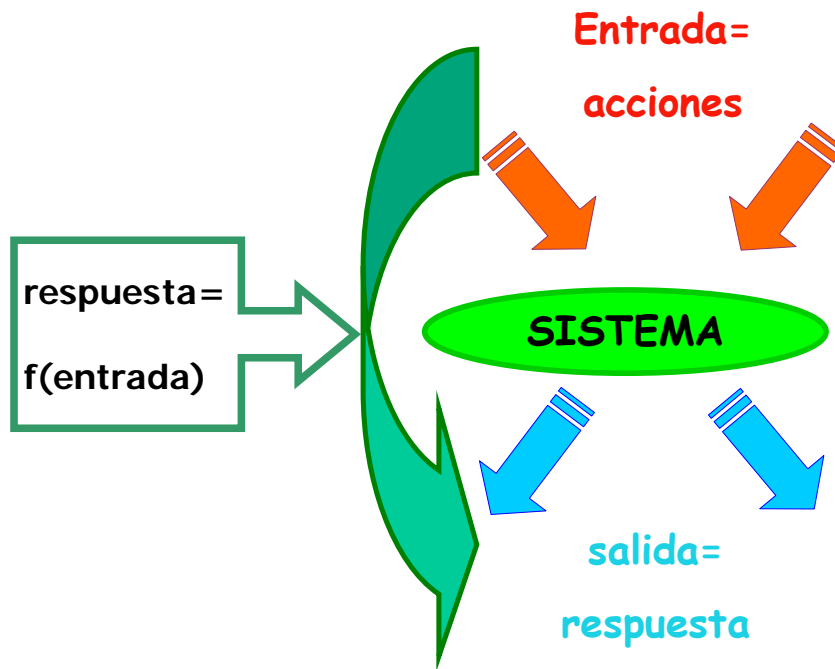
Para poder entender el fenómeno o proceso que tiene lugar en el sistema en estudio debemos adquirir la capacidad de reconocer las variables que producen modificaciones en el sistema (entradas) e identificar cómo responde el sistema (salidas) frente a cambios de dichas variables.(esquema 3, transparencia 4).

¹ Vucetich, H. Notas del curso de postgrado "Introducción a la filosofía exacta de la ciencia". Facultad de Ciencias Exactas. UNLP (1997).

² Ver fotocopias sobre Keppler, centro de estudiantes

³ Enciclopedia SALVAT Diccionario. (1978) Salvat Editores, S.A. Barcelona.

⁴Vucetich, H. "Algunas ideas sobre filosofía de las Ciencias" Seminario interno, cátedra de Física Experimental I. Fac. de Ciencias Exactas. UNLP. 20 de Abril de 1998.



Esquema 3
(Transparencia 4)

Hay un sistema que ha interesado al hombre desde que existen registros: Los cielos. Se entendía que había alguna conexión entre las lluvias, algunos ciclos biológicos y los cielos. En particular los griegos suponían que existía un orden y querían encontrarlo. De allí surge la Filosofía natural, precursora de la Ciencia actual. El método que siguieron fue la observación, del cual surgieron distintos modelos, prevaleciendo con más fuerza el geocéntrico. El desarrollo del conocimiento de la naturaleza y de la ciencia en general no ha sido lineal, no puede desconocerse la influencia de las cosmologías vigentes en cada época en el desarrollo del pensamiento y en la aceptación de las distintas teorías por los científicos, las autoridades y la sociedad en general (ver por ej. la ref.5).

I.2 OBJETIVOS DEL EXPERIMENTO: ¿medio o fin? (transparencia 5)

El objetivo último de la realización de un experimento es encontrar un resultado. Ese resultado puede consistir en el aprendizaje de cómo funciona el sistema en estudio, puede ser su caracterización, sus especificaciones o su evolución en el tiempo. El conocimiento que nos de el resultado nos permitirá predecir la evolución o respuesta del sistema si podemos relacionarlo con alguna teoría existente o nos permitirá verificar si el modelo que hemos propuesto, o la hipótesis que hemos planteado, para describirlo es realmente válido.

Para poder recorrer este camino es necesario realizar varios aprendizajes previos, que no necesariamente implican conocimiento de leyes físicas sino la adquisición de metodologías de trabajo y de ciertas habilidades y competencias.

Lo anterior incluye:

a) Definir el sistema en estudio, esto implica el reconocimiento del objeto, o fenómeno, de estudio y sus fronteras. Es decir los límites reales o imaginarios que lo separan del resto del universo.

5 Thomas S. Kuhn. *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica (2000).

- b) Capacidad de efectuar hipótesis de trabajo (predicción de comportamiento, respuestas, evolución temporal). La enunciación de una hipótesis implica (implícita o explícitamente) la existencia en el observador de un modelo o marco teóricoa previo que le permite efectuar suposiciones o esperar que se den determinadas respuestas.
- c) Saber medir o aprender a hacerlo con instrumentos simples y más sofisticados.
- d) Tener una metodología de trabajo para planificar previamente cómo se realizará la medida, definiendo funciones dentro del grupo y determinando las tareas a realizar y el orden en que se las realizará.
- e) Saber como registrar los resultados (Tablas, Gráficos...)
- f) Saber como manipular e interpretar los resultados (obtención de relaciones funcionales mediante ajuste de modelos matemáticos)
- g) Saber cómo informar los resultados
- h) Reconocer la bondad y límites de validez de los resultados obtenidos

I.3 PROCESO DE MEDICION:

Al efectuar una experiencia estamos observando un fenómeno y midiendo una magnitud.

El proceso de medición supone⁶: (Transparencia 14)

- a) Un sistema objeto de la medida
- b) Un instrumento de medida
- c) Un sistema de comparación con la unidad o patrón, que tiene su espacio de estados propio.

Para definir el proceso es necesario especificar cómo debe realizarse la interacción entre a, b y c. La interacción entre b y c se denomina calibración. El proceso define una **magnitud física** y da como resultado un **valor**, el valor obtenido es el número de veces que la unidad o patrón está contenida en el sistema objeto de medida. El resultado será un número (vamos a ver más adelante que en realidad es un intervalo) con unidades.

El valor debería ser independiente del proceso de medición pero dependerá de la unidad de medida (por ej. una longitud puede expresarse en m, Km, pies, millas, años luz, etc.).

Acá podemos hacernos varias preguntas:

1. Influye de alguna manera el experimentador, al que vamos a llamar observador, en el resultado
2. ¿Influye de alguna manera el proceso de medición sobre el sistema a medir?¿lo modifica, lo perturba?
3. ¿Existe un valor verdadero de la magnitud a medir?¿podemos nosotros medirlo?
4. ¿Cómo se presenta el resultado?, por ej: ¿con cuántas cifras tiene sentido expresarlo?
5. ¿Qué pasará si realizamos la medida varias veces? ¿Coincidirán los resultados?

Si se te ocurren otras preguntas y no quedan respondidas en el resto del apunte, por favor plantéalas, seguramente dimos por sentado (erróneamente) que no era necesario formularlas.

Empecemos por la **pregunta 1**

⁶Roederer, Juan G. (1986). *Mecánica Elemental*. 8a. edición. EUDEBA. Buenos Aires.

a) Supongamos que los sistemas a analizar son los presentados en las transparencias 8, 9 y 10.

¿Qué queremos saber sobre ellos?

El sistema ¿es la imagen completa? ¿es la parte gris o la blanca de la transparencia 8?, ¿es la blanca o la punteada de la transparencia 9?, ¿es la fig (a), la (b) o la (c) de las 10?. Nuestra descripción del sistema variará y también las características del mismo que queremos conocer, según cuál sea *el sistema* que queremos estudiar.

¿Qué respondemos, entonces, a la pregunta 1. El análisis anterior nos muestra que si bien el observador en ninguno de los casos está modificando al sistema, su idea de cuál es el sistema objeto de análisis modificará las preguntas que se haga sobre el mismo y por lo tanto las magnitudes que mida, pudiendo llegar a conclusiones erróneas.

b) El observador puede tener ideas previas, o preconceptos, sobre el sistema, que pueden llevarlo a no efectuar todas las medidas necesarias para garantizar la objetividad de los resultados.

B1) Por ej. por influencia de sus sentidos (ver transparencia 11). ¿Podría asegurar, sin efectuar las correspondientes mediciones, que en la transparencias 11 las rectas horizontales no son paralelas?

B2) Por estar acostumbrado a hacer suposiciones en los problemas de lápiz y papel. Suposición de cuerdas sin masa e inextensibles, ejes de poleas sin roce, etc. Si se pretende estudiar un sistema hay que determinar experimentalmente cómo se comporta y **no podemos definir cómo debería comportarse**. Por lo tanto es imprescindible explicitar cuáles son las suposiciones que se hacen sobre el sistema y cómo se va a proceder para verificar si las suposiciones son válidas. Por ej. en la transparencia 12 no podemos *a priori* suponer que la masa de la cuerda que conecta a los cuerpos es despreciable, ni que dicha cuerda es inextensible

Tratemos ahora de abordar la **pregunta 2**: podemos pensar tres situaciones

- determinación de la superficie de una mesa utilizando una cinta métrica.
 - determinación de la temperatura de un líquido con un termómetro de mercurio.
 - determinación de la velocidad de una bala a partir de las consecuencias de su impacto en algún objeto.
-
- en la primer situación el proceso de medición no parece que vaya a afectar al sistema en estudio (la superficie).
 - en la segunda situación si el termómetro es muy grande, con relación a la cantidad de líquido, sí lo afectaría.
 - en la tercera situación el objeto relacionado con la medición (la bala) se destruye.

En el siglo XIX se pensaba que con suficiente dinero, ingenio y tiempo se podría medir con la exactitud que se deseara cualquier magnitud. En la actualidad sabemos que es muy difícil medir sin afectar de alguna manera al sistema medido. En particular cuando se busca realizar medidas a escala atómica no se puede evitar que el proceso de medición perturbe al sistema. En general la perturbación es lo que nos permite medir las variaciones de alguna magnitud al pasar el sistema de un estado a otro y de esa manera modificando al sistema aprendemos sobre él.

II. INTERVALO DE INCERTIDUMBRE O DE CONFIANZA

Para responder a las **preguntas 3, 4 y 5** que nos formuláramos en el párrafo anterior debemos recordar que medir es un proceso de cuantificación que implica comparación con un patrón. El resultado de ese proceso no será un número exacto pues aparecen indeterminaciones que llamamos incertidumbres (en la bibliografía sobre medición se lo puede encontrar también como incerteza, y en la terminología más

antigua como error). Estas incertidumbres provienen de:

- 1) la apreciación del instrumento: menor lectura de la escala.
- 2) la estimación de la lectura: menor intervalo que el observador puede estimar con ayuda de la escala, generalmente 1/2 división.
- 3) la indefinición de la magnitud a medir.

En la transparencia 13 vemos en (a) un metro (instrumento) y en (b) el metro y un objeto cuya longitud queremos medir, por ej. el ancho de una mesita (de borde a borde). La receta nos dice ponga un extremo del metro en coincidencia con uno de los bordes y fíjese con cuál división de la escala graduada coincide el otro borde (esto se ve en la fig (b) de la transparencia mencionada). Podemos distinguir que el objeto que no tiene una longitud bien definida por su naturaleza redondeada termina en algún punto entre 41,6 y 41,7cm.

Sin embargo no tenemos elementos para asegurar en el ej. anterior que algún valor particular dentro del intervalo 41,6-41,7cm es mejor que otros para representar a la medida. ¿Cómo expresamos este hecho?, es decir, ¿cómo informamos el resultado de la medida? podemos decir que el resultado es todo el intervalo [41,6-41,7] cm o podemos expresarlo como $(41,6 \pm 0,5)$ cm.

Cuando intentamos medir una magnitud normalmente estamos haciendo una suposición, ésta es: *existe un valor definido a medir*. Sin embargo, de acuerdo con lo anterior **no estamos midiendo un valor** de la magnitud de interés sino que **MEDIMOS UN INTERVALO**. La existencia de un valor bien definido es entonces una idealización muy útil de la realidad.

El resultado de una medida será: $(x \pm \Delta x)$ unidades, que significa que si volviéramos a hacer la medida esperamos que ésta resulte dentro del intervalo:

$$x - \Delta x \leq x_m \leq x + \Delta x \text{ expresado en las unidades de medida empleadas}$$

donde llamamos a Δx incertidumbre absoluta de la medida.

Expresado gráficamente sobre la recta numérica el resultado será el que se muestra en la Figura II.1.:

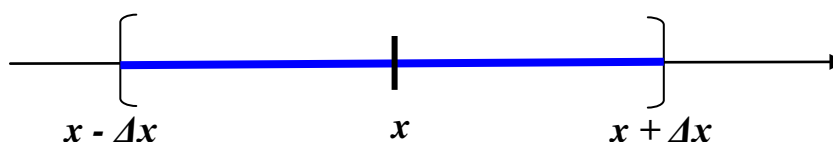


Figura II.1

La respuesta a la **pregunta 2** es: El resultado del proceso de medición no da un valor exacto sino un intervalo en el que tenemos confianza que se encuentre el resultado de una nueva medida que pudiéramos efectuar de dicha magnitud, si la experiencia se realizara exactamente en las mismas condiciones.

¿Cuán significativo es el intervalo de incertidumbre de la medida? Aquí sólo nos salva el sentido común. Comparemos el valor de la incertidumbre con el de la magnitud medida. Es decir analicemos el valor de la incertidumbre con respecto al valor de la magnitud medida, o más propiamente

la incertidumbre relativa: $\frac{\text{incertidumbre absoluta}}{\text{valor medido}}$

en el ejemplo: $\pm(0,05\text{cm}/41,65\text{cm})=\pm 0,0012$ (**OJO**: la incertidumbre relativa no tiene unidades)

redondeando 0,001. Generalmente se la expresa como un porcentaje. En ese caso la incertidumbre relativa

es: $\pm 0,1\%$

Del análisis anterior podemos deducir la respuesta a la **pregunta 4**, es decir con cuántas cifras tiene sentido presentar un resultado experimental: no más que la primera afectada por la incertidumbre de la medida.

¿Cuál es la causa de la existencia de incertidumbre?

- 1) Imperfecciones o mala calibración del Instrumento, o mala utilización del mismo. Estos son siempre en el mismo sentido y prácticamente iguales (la calibración puede no ser lineal en todo el rango de medida), por lo tanto resultan difíciles de detectar (INCERTIDUMBRES SISTEMATICAS). En parte la mala calibración implicaría un error en el empleo del instrumento
- 2) la aproximación o estimación de la medida (INCERTIDUMBRE DE APRECIACIÓN) que depende de la resolución del instrumento.
- 3) Falta de definición del sistema o magnitud a medir (INCERTIDUMBRE DE INDETERMINACION)
- 4) A las causas anteriores debemos agregar fluctuaciones que no tienen origen evidente y que dan lugar a la dispersión de medidas repetidas (INCERTIDUMBRES CASUALES).

Instrumentos

¿Qué le requeriremos al instrumento después del análisis anterior

- 1) PRECISION o capacidad para repetir una medida
- 2) RESOLUCION menor diferencia entre dos medidas sucesivas
- 3) SENSIBILIDAD o capacidad de diferenciar cambios pequeños de la magnitud de interés.
- 4) EXACTITUD o capacidad para reproducir el valor de un patrón

ATENCIÓN: debe tenerse cuidado con las incertidumbres sistemáticas, éstas surgen de una insuficiencia en el proceso de medición, no son fácilmente detectables, no hay que olvidar que pueden estar presentes. Verificar siempre la calibración del instrumento de medida, aún cuando se disponga de un instrumento sofisticado que pueda parecer muy confiable.

El punto 3) contesta la **pregunta 4** y nos sugiere nuevas preguntas ¿cómo determinamos la influencia de las incertidumbres casuales? ¿Podemos cuantificarlas?

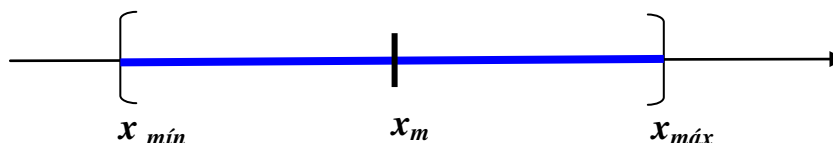
Podemos aproximar una respuesta a esta pregunta. Si hiciéramos por ej 5 medidas de una dada magnitud. Por ej. El diámetro de una esfera medido con un calibre o con un micrómetro. Hechas las medidas encontramos que los valores no son exactamente iguales. ¿Cuál será el intervalo más representativo? Como una primera aproximación dado que no tenemos muchos datos nos conviene tomar el intervalo que contenga a todos los resultados por lo tanto podemos encontrarlo decir que el resultado está entre el valor máximo y el valor mínimo obtenido. Y ¿cómo expresaremos esto de manera similar a la realizada en la Figura II.1. Para poder hacerlo tenemos que acordar cómo determinar el valor de x y el de Δx a partir del intervalo $x_{m\acute{a}x} - x_{m\acute{i}n}$. La respuesta no es única. Podríamos tomar como valor más representativo de la medida al promedio de todos los valores medidos, que lo vamos a notar $\langle x \rangle$,

$$x = \langle x \rangle = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) / 5 \quad (\text{II.1})$$

o podríamos tomar como más representativo el valor de x en el centro del intervalo:

$$x_m = x_{m\acute{a}x} - x_{m\acute{i}n}. \quad (\text{II.2})$$

Ojo debemos notar que cualquiera de las dos elecciones no modifica el intervalo sino al valor x , que suponemos el más representativo



Para expresar esta representación en forma similar a la hecha en la Fig II.1 Δx lo determinamos como la semidiferencia de los valores máximo y mínimo obtenidos

$$\Delta x = x_{m\acute{a}x} - x_{m\acute{i}n} / 2 \quad (\text{II.3})$$

El valor $\langle x \rangle$ dependiendo de los valores específicos obtenidos en cada experiencia podría coincidir con x_m , podría ser mayor o menor que éste pero siempre ambos estarán comprendidos en el mismo intervalo. Nos podemos preguntar cuál de los dos es más representativo de la medida

Para contestar estas pregunta se necesita primero analizar cómo conviene presentar y manejar un conjunto numeroso de datos, problema que trataremos en el parágrafo IV.

III. INCERTIDUMBRE NOMINAL DE UNA MEDICIÓN

A lo largo de las páginas anteriores hemos visto que las incertidumbres pueden tener distintas causas:

- a) Calibración del instrumento (sistemáticas, Δ_s)
- b) menor lectura del instrumento (apreciación, Δ_a , incluye apreciación del observador)
- c) falta de definición del objeto a medir (Δ_d)
- d) interacción del instrumento con el objeto a medir (Δ_i)
- e) fluctuaciones estadísticas (Δ_f)

a las cuales pueden contribuir una o más variables en el caso de las medidas indirectas (ver Apéndice 2).

En principio al realizar una medida todas pueden estar presentes en mayor o menor grado. Vamos por lo tanto a llamar incertidumbre nominal a la dada por la siguiente expresión

$$\Delta_N = [(\Delta_s)^2 + (\Delta_a)^2 + (\Delta_d)^2 + (\Delta_i)^2 + (\Delta_f)^2]^{1/2} \quad (\text{VII.1})$$

Este procedimiento de sumar los cuadrados de los errores es un resultado de la estadística, y proviene de suponer que todas las distintas fuentes de error son independientes unas de otras⁷.

⁷Teoría de probabilidades y aplicaciones, H. Cramér, Aguilar, Madrid (1968); *Mathematical method of statistics*, H. Cramér, Princeton Univ. Press, New Jersey (1958).

IV. TRATAMIENTO DE DATOS

IV.1 HISTOGRAMA

Los datos numéricos de todo tipo, ya sea los provenientes de medidas realizadas en una experiencia de laboratorio, con fines científicos o industriales, o de una encuesta social, se suelen representar gráficamente para obtener una apreciación rápida y global de los mismos.

El primer paso en el tratamiento de dichos datos, sobre todo si son muy numerosos, consiste en ordenarlos de alguna manera conveniente. Suele agrupárselos en **clases** de acuerdo a su magnitud, o de acuerdo con algún intervalo adecuado de alguna variable de la cual dependan.

Analicemos un ejemplo: 120 estudiantes se presentaron a una prueba escrita en la que se calificó con notas entre 0 y 100. Una forma de analizar el resultado de dicho examen es establecer el porcentaje de alumnos que obtuvieron una nota determinada. Para ello podemos contar el número de alumnos que obtuvieron entre 0 y 9, entre 10 y 19, ... y entre 90 y 99, es decir podemos dividir a los alumnos en 10 clases.

Los datos podrían presentarse como se muestra en la Tabla IV.1. Al número de datos en cada clase se lo suele denominar la **frecuencia** de la clase. La Tabla IV.1 muestra la **distribución de frecuencias**. Los pares de números que definen cada clase, por ej. 10-19, se denominan límite inferior y superior de la clase. El **ancho** de una clase es la diferencia entre los límites inferiores de dos clases consecutivas. En la elección de clases utilizada para construir la Tabla 1 todas las clases tienen el mismo ancho. Se podría, sin embargo, elegir un agrupamiento de datos en el cual las clases no fuesen todas del mismo ancho.

Tabla IV.1 Notas obtenidas en el examen analizado agrupadas en diez clases iguales.

Clase	frecuencia	Clase	Frecuencia
0 - 9	2	50 - 59	32
10 - 19	5	60 - 69	25
20 - 29	6	70 - 79	10
30 - 39	14	80 - 89	2
40 - 49	22	90 - 99	2

Si bien la Tabla IV.1 nos permite obtener rápidamente una idea de la distribución de notas, una representación gráfica podría ser aún más clara o ilustrativa. La Fig. IV.1 muestra una gráfica en la cual se representan las notas en abscisas y las frecuencias en ordenadas. Los puntos se obtuvieron dibujando la frecuencia como función de los valores medios de las clases correspondientes. Si dichos puntos son unidos por líneas rectas, obtenemos la representación gráfica de la Fig. IV.1 que se denomina **poligonal de frecuencias**.

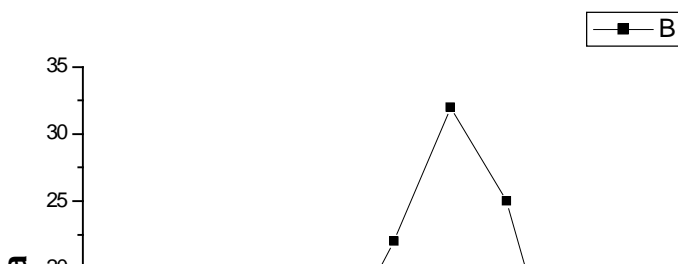


Figura IV.1. Poligonal de frecuencias correspondiente a la Tabla IV.1.

Una forma alternativa de graficar los datos que se desean analizar se muestra en la Fig. IV. 2. En ella se presentan una serie de rectángulos construidos con su base igual al ancho de la clase y su altura tal que el área del rectángulo coincida con la frecuencia de la clase. La figura así construida se denomina **histograma**.

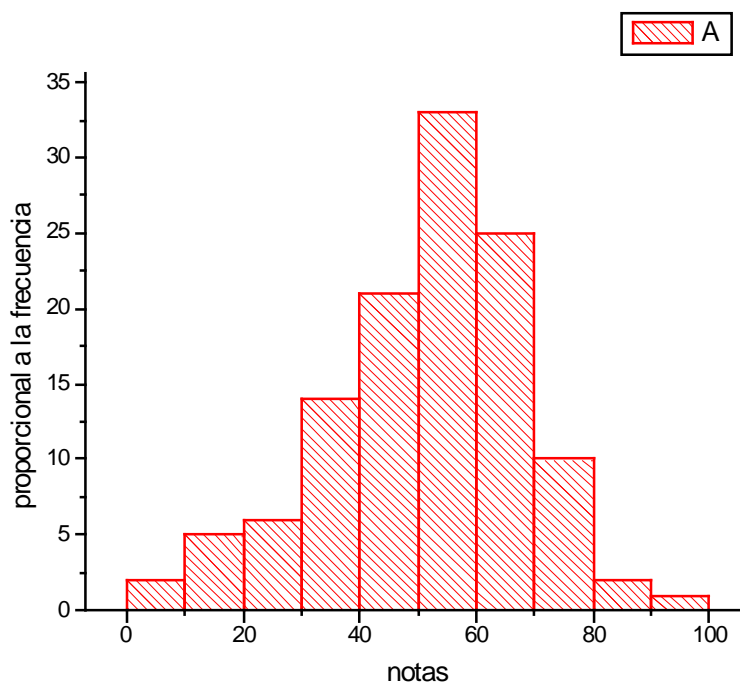


Figura IV. 2. Histograma correspondiente a los datos presentados en la Tabla IV.1.

Si el área del rectángulo notado A en la figura corresponde a la frecuencia 1, fácilmente puede determinarse por comparación con este patrón la frecuencia correspondiente a cada una de las clases y el área total del histograma expresada en esta unidad coincidirá con el número de datos, en este caso el número de estudiantes.

En el caso en que los anchos de todas las clases son iguales las alturas de los rectángulos serán proporcionales a la frecuencia de cada clase.

IV.2 INTERPRETACIÓN DEL HISTOGRAMA

El histograma nos ayuda a tener una mejor comprensión de la distribución de los resultados con un solo vistazo. En algunos casos el histograma es suficiente para presentar los resultados. Si la única información que se presenta es el histograma queda a criterio del lector la interpretación de la distribución. Si el conjunto de datos a analizar proviene de la repetición en las mismas condiciones experimentales de la medida de una magnitud, el experimentador querrá, en general, arribar a alguna conclusión a partir de sus datos y/o encontrar una forma alternativa más compacta de presentarlos.

Cuando se mide varias veces una magnitud, debido a las fluctuaciones estadísticas los valores obtenidos no son coincidentes. Cabe entonces preguntarse ¿hay un único valor que pueda caracterizar a la distribución de datos? Si lo hubiera ¿Cuál es el valor más representativo del conjunto? Vamos a ver que existen varios valores posibles (como vimos al analizar el caso de pocos datos) y que en función del uso que queramos darle a nuestros resultados nos convendrá expresarlos en función de uno u otro de esos valores. Estos son:

1) **La moda**, o valor de la variable en el centro de la clase de mayor frecuencia. En nuestro ejemplo 55.

La mayor parte de las distribuciones presentan un punto máximo o pico, generalmente cerca del centro, **tendencia central**. Si el pico tiene un valor bien definido, al valor correspondiente sobre la escala horizontal se lo llama moda de la distribución. Si se quiere llamar la atención sobre la concentración de los valores medidos en alguna clase particular se da el valor modal. En algunos casos la distribución puede tener dos puntos máximos y en ese caso hablaremos de **distribución bimodal**.

2) **La mediana**, o valor de la variable en el centro del conjunto ordenado.

Si el conjunto de datos se ordena en orden creciente, o decreciente, se denomina mediana al valor de la variable en el centro del conjunto. Si el conjunto está constituido por un número impar, n , de datos, $n=2k+1$, entonces la mediana será el valor de la variable para la observación $k+1$ -ésima. Si el conjunto de datos es par, $n=2k$, la mediana estará dada por el promedio aritmético de los valores k -ésimo y $k+1$ -ésimo. La mediana es el valor que corresponde a una línea vertical que divide al histograma en dos zonas de áreas iguales. ¿Sabría encontrar el valor para nuestro ejemplo? Ver Apéndice 1 para indicaciones en el uso de programas específicos para ordenar los datos y obtener la mediana.

3) **El valor medio (también llamado Media):**

$$\langle x \rangle = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N)/N, \text{ donde } N \text{ es el número de datos.}$$

La frecuencia media, generalmente, no da mucha información pero sí es de interés obtener el valor medio de los datos. Obtenga el valor en el ejemplo anterior

La expresión anterior también puede escribirse:

$$\langle x \rangle = (f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n) / (f_1 + f_2 + \dots + f_n) \quad (\text{IV.1})$$

donde f_i es la frecuencia de la clase i , x_i el valor medio de la variable en la clase i -ésima y n es el número de clases. La última ecuación nos da el promedio pesado de los n valores que toma la variable x , donde los pesos están dados por la frecuencia de la clase correspondiente.

¿Cuál de los valores —1), 2) ó 3)—, es más adecuado para representar al conjunto de datos?

Si la distribución fuera muy asimétrica la diferencia entre las tres magnitudes que hemos definido sería importante. Si la media y la mediana coinciden la distribución es simétrica. Por lo tanto deben tomarse

con precaución muchos datos estadísticos que nos presentan los medios gráficos pues cada uno puede hacer la presentación de la manera que más le convenga a sus fines particulares. Por otra parte si la distribución es muy estrecha y simétrica los tres valores que hemos definido se aproximan entre sí y cualquiera de ellos puede tomarse como representativo de la distribución.

Si pudiésemos tomar infinitos datos de alguna magnitud medible, el ancho de las clases podría tender a cero y la poligonal y el histograma coincidirían entre sí y con una curva continua. La forma de la curva variaría según el tipo de datos que se estuviera analizando.

V. TRATAMIENTO DE LAS INCERTIDUMBRES CASUALES (FLUCTUACIONES ESTADÍSTICAS).

V.1. TEORÍA ESTADÍSTICA DE "ERRORES" ⁸

Vamos a tratar de conectar el tratamiento de datos introducido en el párrafo anterior con la determinación del valor más representativo de un conjunto de medidas de una misma magnitud realizado exactamente en las mismas condiciones.

A tal fin se deben realizar algunas suposiciones que están contenidas en una teoría, que por su desarrollo histórico se conoce como *teoría estadística de errores*

Los postulados fundamentales de la teoría estadística de "errores" establecen que, dado un conjunto de medidas, todas efectuadas en idénticas condiciones, suficientemente grande :

- I. El valor más probable de la serie de mediciones es el valor medio.
- II. Es igualmente probable cometer "errores" de igual valor y distinto signo (Esto quiere decir que es igualmente probable obtener valores mayores que el valor medio, errores por exceso, o menores que el valor medio, por defecto).
- III. En una serie de mediciones es tanto más probable "cometer un error" cuanto menor sea su valor absoluto. (Esto significa que es más probable que los valores sean próximos al valor medio que alejados de éste)

Tarea para el alumno: exprese estos postulados en la nomenclatura empleada en la actualidad y descripta en los párrafos anteriores.

Los postulados anteriores equivalen a decir que si se realiza un experiencia el valor de la magnitud que se desea medir tiene una probabilidad mayor de estar en un cierto intervalo, el que rodea al valor medio del conjunto de valores medidos, y mucho menor probabilidad de adoptar valores muy apartados del valor medio. **OJO estamos hablando de probabilidades.**

Una distribución de frecuencias que responde a estos postulados y que es común en muchos campos es la llamada distribución normal, también conocida como Campana de Gauss, cuya expresión

⁸ Se utiliza la palabra **errores** siguiendo la nomenclatura histórica, actualmente *error* ha sido reemplazado por *incertidumbre*, ver por ej: B. N. Taylor and C. E. Kuyatt. *NIST Technical Note 1297* (1994)

matemática está dada por:

$$y = K \exp[-h^2(x-m)^2] \quad (V.2)$$

donde K , h y m son constantes, $\exp(x) = e^x$, función exponencial y e es la base de los logaritmos neperianos (o naturales). La representación gráfica de esta función se muestra en la figura V.1, donde se aprecia que para $x = m$ la función toma su máximo valor, que la curva es simétrica respecto de m y que para $x = m \pm h$ la curvatura de la función cambia.

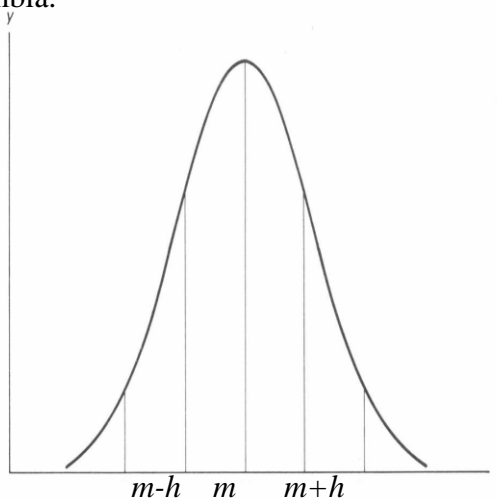
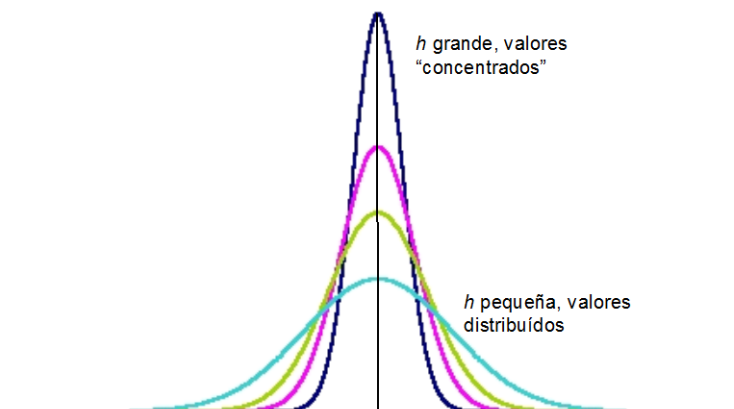


Figura V.1. Representación de la función V.2

Si en V.2 mantenemos K y m constantes y le permitimos variar a h obtendríamos las curvas de la Fig. V.2.

Figura V.2. Curva de Gauss para distintos valores de h .



Las curvas, mostradas en la figura anterior tienen un máximo en $x = m$. Cuando $x = m$ la función toma el valor $y = K$ y cuando $x = m \pm a/h$, toma el valor $y = \exp(-a^2)$. El valor de la función se reduce a $K/100$ para $a \cong 2,15$.

El área total bajo la curva, de acuerdo con lo que saben de matemática puede obtenerse integrando la función V.1 entre $x = -\infty$ y $x = +\infty$. Si se efectúa dicha integral se obtiene:

$$\int K \exp[-h^2(x-m)^2] dx = K \sqrt{\pi}/h$$

si normalizamos la función dando a K el valor: $K = h/\sqrt{\pi}$ el área bajo la curva será igual a 1 y la curva quedará determinada por sólo dos parámetros h y m . Donde m es el centro de la distribución, o valor medio de la magnitud medida. Vamos a ver más adelante que el valor de h está relacionado con la dispersión de los valores en torno al valor medio m , una idea intuitiva puede obtenerse de la Figura IV.1 en la que se ha

representado la función para distintos valores de h .

Si repitiéramos varias veces una medida (por ej. el tiempo de caída de una moneda desde una altura dada) los resultados no serían coincidentes y si los representáramos mediante un histograma podríamos caracterizar al mismo mediante distintas magnitudes (media, mediana, valor medio). Nos habíamos preguntado ¿Cuál de los tres representa mejor a nuestro conjunto de medidas? ¿Podríamos dar un único valor que represente a toda la distribución de valores y nos de información sobre la medida? Si los valores están muy distribuidos, o si la distribución no es simétrica, es difícil determinar cuál de las tres magnitudes mencionadas anteriormente puede representar mejor a la medida. Si la distribución es grande ó si es simétrica, los tres valores tienden a coincidir. Sin embargo no es suficiente dar ese valor coincidente para saber qué valor podríamos esperar obtener si volviésemos a repetir la medición de esa misma magnitud en las mismas condiciones. Por otra parte podríamos obtener datos más concentrados o menos concentrados alrededor del valor medio (como muestra la Fig. V.1). Es decir deberíamos dar alguna información sobre la amplitud de la distribución.

Si nos hacemos la pregunta: ¿cómo podemos expresar el resultado de la medida de una forma compacta e informativa? Tendríamos que analizar un poco más la información que tenemos disponible.

V.2. VALOR MEDIO Y DESVIACION ESTANDAR DE UNA SERIE DE MEDIDAS

Hagamos algunas cuentas para ver si podemos responder los interrogantes que quedaron planteados

Supongamos que existe un valor que es el más representativo de una serie de medidas de la misma magnitud al que llamaremos x_{MR} . Podríamos decir que el apartamiento de x_{MR} de una dada medida es la diferencia, Δx_i , entre el valor obtenido en esa medida, x_i , y el más representativo del conjunto de medidas, x_{MR} . Es decir:

$$\Delta x_i = x_i - x_{MR} \quad (V.1)$$

Si medimos N veces la magnitud de interés obtendremos los N datos experimentales

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$$

A partir de la expresión V.1 dichos datos podrán expresarse en forma general como:

$$x_i = \Delta x_i + x_{MR} \quad (V.2)$$

por lo tanto la media aritmética de las N medidas será:

$$\langle x \rangle = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N)/N = x_{MR} + (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_N)/N \quad (V.3)$$

Si se parte de que las fluctuaciones son al azar, entonces existe la posibilidad de tener apartamientos tanto por exceso como por defecto entre cada uno de los valores medidos y el valor más representativo de la magnitud medida. Esto significa que los Δx_i podrán ser tanto positivos como negativos y por consiguiente la cantidad $(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_N)/N$ puede ser muy pequeña. Si consideramos un número e tal que

$$e > \Delta x_i \quad \text{para todo valor de } i \text{ se cumplirá:} \\ | (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_N)/N | < e \quad (\text{V.4})$$

A partir de las expresiones V.3 y V.4 puede concluirse que $\langle x \rangle$ va a ser muy próximo a x_{MR} y, por lo tanto, puede ser considerado el "mejor" valor obtenible a partir de las medidas.

En general, cuanto mayor sea N más próximo estará $\langle x \rangle$ a x_{RM} . Acá se nos plantea un interrogante. ¿Cómo determinar e sin conocer x_{RM} ? Podemos encontrar una respuesta a dicha pregunta si estudiamos la dispersión de las medidas alrededor de $\langle x \rangle$.

Al valor de la medida i -ésima podemos escribirlo:

$$x_i = \langle x \rangle + d_i \quad (\text{V.4})$$

donde d_i , desviación i -ésima, da cuenta del apartamiento de la i -ésima medida respecto del valor medio $\langle x \rangle$.

OJO: prestar atención a la diferencia entre las expresiones V.2 y V.4

Entonces a partir de (V.3) y (V.4) podemos escribir:

$$x_i = x_{MR} + \Delta x_i = \langle x \rangle + d_i$$

es decir:

$$\Delta x_i - d_i = \langle x \rangle - x_{MR} \quad (\text{V.5})$$

Si efectuamos la sumatoria de i igual 1 hasta N de la expresión (V.5):

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_N - (d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N) = N(\langle x \rangle - x_{MR}) \quad (\text{V.6})$$

A partir de (V.3) y (V.6) surge que:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N = 0,$$

es decir: la suma de las desviaciones es 0.

Evidentemente el promedio de d_i no nos dará información sobre la distribución de las medidas pues puede ser un valor muy pequeño aún cuando la dispersión de valores pueda ser muy grande. Por ese motivo vamos a introducir otra magnitud: la desviación media cuadrática, o **varianza**, que definimos como:

$$S^2 = (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_N^2)/N \quad (\text{V.7})$$

es decir si llamamos S a la expresión:

$$S = [(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_N^2)/N]^{1/2} = [(\sum (x_i - \langle x \rangle)^2)/N]^{1/2} \quad (\text{V.8})$$

S , desviación estándar, es la raíz cuadrada de la desviación cuadrática media. De (V.8) vemos que S depende del valor que se elija como "mejor valor" de la medida.

Si desarrollamos $\sum d_i^2$, suponiendo que X es el mejor valor de la medida

$$\sum d_i^2 = \sum (x_i - X)^2 = N X^2 - 2X \sum x_i + \sum x_i^2 \quad (\text{V.9})$$

La expresión (V.9) es cuadrática en X y pasa por un mínimo para algún valor de X , dado que el primer y el último término son positivos. Si aplicamos la condición de mínimo (derivamos la expresión respecto de X y la igualamos a cero y verificamos que la derivada segunda sea mayor que cero para el valor de X que anula a la derivada primera) llegamos a que:

$$X = (\sum x_i)/N = \langle x \rangle \quad (\text{V.10})$$

La igualdad (IV.10) significa que la media aritmética de los valores medidos minimiza la desviación estándar y la podemos elegir como el valor más probable. La relación (V.10) coincide con nuestra elección anterior. Podríamos demostrar que el: valor medio coincide con la moda y la mediana.

La magnitud definida en (V.8) depende de la forma en que los datos individuales fluctúan alrededor del promedio y no depende del número total de mediciones. Trabajamos con (V.8) y no con la varianza pues esta última no posee las mismas dimensiones que las observaciones.

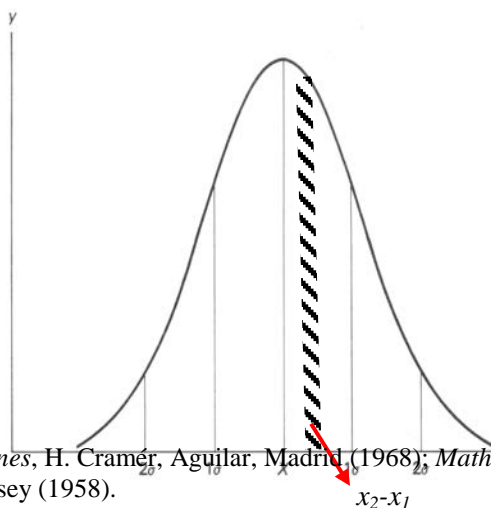
En realidad a partir de la teoría estadística⁹ la expresión correcta de la desviación estándar es:

$$S = [\sum (x_i - \langle x \rangle)^2 / (N-1)]^{1/2} \quad (\text{V.11})$$

Se puede demostrar que si se tuvieran infinitos datos la Desviación Estándar, S , coincide con la constante h de la expresión V.I, y que el valor medio, $\langle x \rangle$, con la constante m en la misma expresión.. Por lo tanto Como vimos de la figura V.1 la distribución de Gauss tiene un máximo en $x = \langle x \rangle$ y puntos de inflexión en $\langle x \rangle \pm S$.

Teniendo en cuenta que la curva de Gauss representa el histograma de un conjunto de infinitos datos y que su área está normalizada, es decir es igual a 1. Dicha área tiene que corresponder al 100% de los datos. Por lo tanto la porción de área comprendida entre dos valores arbitrarios, x_i y x_j de la variable que representa a la magnitud de interés, x , nos dará el porcentaje de datos comprendidos en el intervalo (x_i, x_j) . En la Figura V.3 se muestra dicha área para el intervalo (x_1, x_2) . ¿Qué información nos da entonces la integral de la curva de Gauss en ese intervalo? La cantidad relativa de datos, $\Delta N/N$, comprendida en dicho intervalo. Si lo pensamos como probabilidades, dado que el área total bajo la curva es igual a 1, la probabilidad de que la observación caiga entre $-\infty$ y $+\infty$ es uno, eso significa que es certeza. Tenemos el 100% de probabilidad de que el valor esté comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$ y una probabilidad:

$$\int_{x_1}^{x_2} y \, dx = \text{área bajo la curva (probabilidad de que la observación caiga en } (x_1, x_2) \text{)}.$$



⁹ *Teoría de probabilidades y aplicaciones*, H. Cramér, Aguilar, Madrid (1968); *Mathematical method of statistics*, H. Cramér, Princeton Univ. Press, New Jersey (1958).

Figura V.3. Se muestra la porción del área bajo la curva comprendida en el intervalo (x_1 y x_2)

En resumen, obtenido un conjunto importante de observaciones de una dada magnitud, a partir de experimentos realizados exactamente en las mismas condiciones, sólo podemos decir qué probabilidad existe de que si se pidiera la medida el valor esté comprendido en un intervalo dado y esa probabilidad coincidirá con el área bajo la curva de la función III.1 cuando ésta toma la forma:

$$y=1/[S(2\pi)^{1/2}]exp[-(x-\langle x \rangle)^2/2S^2] \quad .(IV.13)$$

La probabilidad de que una medición esté dentro del intervalo ($\langle x \rangle - S$, $\langle x \rangle + S$) coincidirá con el porcentaje de la superficie debajo de la campana de Gauss comprendida en dicho intervalo. Si se hacen las cuentas correspondientes se obtiene: 68% . Si el mismo razonamiento se aplica al intervalo ($\langle x \rangle - 2S$, $\langle x \rangle + 2S$) la probabilidad sube al 95,4%, para el intervalo ($\langle x \rangle - 3S$, $\langle x \rangle + 3S$) la probabilidad es de 99.7%.

VI. DISTRIBUCIÓN DE GAUSS Y MEDICIONES REALES.

VI.1 DETERMINACIÓN DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR.

Para que la curva de Gauss de la Figura III.1 representara la distribución de frecuencia de un observable deberíamos tener infinitas observaciones. Evidentemente nunca las tendremos, sin embargo podemos suponer que sí disponemos de ellas. Ese conjunto infinito de observaciones que podrían hacerse con un dado instrumento o en un determinado proceso de medición constituirá el **universo** (de todas las medidas posibles).

Nuestro conjunto de medidas constituye una **muestra** de ese universo de las observaciones que podrían llevarse a cabo pero al que no tenemos acceso. Si sólo tenemos un conjunto de N observaciones ¿qué distribución Gaussiana (o qué $\langle x \rangle$ y S) es adecuada para describir dicho conjunto?. ¿Cómo podemos con nuestro conjunto finito de medidas inferir alguna información relacionada con la distribución del universo?

VI.2 TRATAMIENTO DE VARIAS SERIES DE MEDIDAS DE UNA MISMA MAGNITUD.

Si obtuviéramos un segundo conjunto de N medidas de la magnitud de interés, el valor medio, en general diferirá del obtenido en el primer conjunto. En principio podemos esperar que la diferencia sea menor que la desviación estándar en cada conjunto. Supongamos que hemos hecho M series de N mediciones, en ese caso tendremos M valores medios $\langle x_j \rangle$, $j=1, \dots, M$. Podríamos preguntarnos: ¿cuál será la media de este conjunto de muestras? ¿cómo podemos obtener la dispersión?. Cada uno de los M promedios fluctuará alrededor del promedio de los promedios:

$$\langle X \rangle = (\sum \langle x \rangle_i) / M = [(\sum x_i^1) / N + (\sum x_i^2) / N + \dots + (\sum x_i^M) / N] / M = \quad (VI.1)$$

$$= [\sum x_i \text{ (suma de todos los valores obtenidos)}] / NM \text{ (número total de mediciones)} \quad (VI.2)$$

Si consideramos a los promedios como datos individuales de una serie de M mediciones podremos determinar la desviación estándar, que notaremos σ , para esa serie.

De acuerdo con la definición de desviación estándar introducida en (IV.8)

$$\sigma = [\sum (\langle x_i \rangle - \langle X \rangle)^2 / M]^{1/2} \quad (VI.3)$$

donde σ es, entonces, la desviación estándar de los promedios o desviación estándar de la media.

La teoría estadística demuestra que (VI.3) puede expresarse en términos de las desviaciones de cada una de las medidas mediante la ecuación:

$$\sigma = \{ \sum d_i^2 / N(N-1) \}^{1/2} = [1/N]^{1/2} S \quad (VI.4)$$

donde S es la dispersión estándar de una de las M series de medidas. Este resultado es muy importante pues significa que podemos predecir las fluctuaciones del promedio de una serie de N mediciones sin necesidad de volver a realizar más series de mediciones. Para obtener (VI.3) necesitamos efectuar $M \times N$ mediciones para obtener (VI.4) es suficiente hacer N mediciones.

De (VI.4) vemos que σ depende de N y es siempre menor que S , σ da el orden de magnitud con el cual podemos esperar que el promedio fluctúe alrededor del *valor más representativo de la medida*.

Entonces podemos decir que si hacemos varios muestreos, o sea tomamos varios conjuntos de N observaciones caracterizados por sus respectivas $\langle x_i \rangle$ y S_i

1) la distribución de los valores medios de cada conjunto es Gaussiana y está centrada en $\langle x \rangle$ (centro de la distribución original).

2) la distribución de las medias es más estrecha que la original, $\sigma < S$ ($\sigma = S/\sqrt{N}$).

Esto implica que una muestra en particular tiene un 68% de probabilidad de estar comprendida en el intervalo $\langle x \rangle \pm \sigma$ y 95% de estar en el intervalo $\langle x \rangle \pm 2\sigma$.

VI.3.DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE MEDIA CUADRÁTICA

A partir de los resultados anteriores podemos concluir que dada una muestra, conjunto de N valores experimentales, la mejor estimación de la magnitud a medir está dada por (III.1) y que la incertidumbre debida a las fluctuaciones estadísticas se determina a partir de la combinación de las ecuaciones (IV.11) y (V.4). Por lo tanto la incertidumbre está dada por

$$\sigma = [(\sum (x_i - \langle x \rangle)^2) / N(N-1)]^{1/2} \quad (VI.5)$$

CONSECUENCIA: En cualquier proceso de medida cuanto mayor sea el número de observaciones más exacta será nuestra afirmación sobre el valor más probable y la desviación estándar. Esto debe tenerse en

cuenta al planificar la experiencia.

OJO La exactitud de la desviación estándar de la muestra como mejor estimación de la desviación estándar del universo depende del tamaño de la muestra. Para valores de N menores que 10 los intervalos para obtener una probabilidad de 68% o 95% se vuelven tan grandes (curva chata) que la determinación de σ pierde sentido.

Receta práctica para el tratamiento de incertidumbres en una medición real:

Si:

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad x_m \pm \Delta_N = [(\Delta_s)^2 + (\Delta_a)^2 + (\Delta_d)^2 + (\Delta_i)^2]^{1/2} \text{ donde } x_m: \text{ valor medido} \\ n < 10 & \quad \langle x_m \rangle \pm \Delta_N = [(\Delta_s)^2 + (\Delta_a)^2 + (\Delta_d)^2 + (\Delta_i)^2 + (\Delta_f)^2]^{1/2} \text{ donde } \Delta_f \text{ estimar la} \\ & \quad \text{incertidumbre máxima debida a las fluctuaciones, a partir del valor mayor medido - el} \\ & \quad \text{valor menor medido.} \\ n > 10 & \quad \langle x_m \rangle \pm \Delta_N = [(\Delta_s)^2 + (\Delta_a)^2 + (\Delta_d)^2 + (\Delta_i)^2 + (\sigma)^2]^{1/2} \text{ donde } \sigma \text{ está dado por} \\ & \quad \text{VI.5} \end{aligned}$$

Para pensar Teniendo en cuenta estos valores: dado el resultado de dos medidas de una dada magnitud por ej. el ancho de una cinta de metal producida en un sistema automático ¿cuándo podremos decir que son iguales?

¿Qué criterio utilizaría para asegurar que dos sistemas de medidas alternativas producirán el mismo resultado? ¿En base a qué parámetro de los introducidos determinaría cuál de los dos es mejor?

VI.4. ELECCIÓN DE INSTRUMENTOS

Teniendo en cuenta nuestra experiencia y todo lo discutido volvamos a pensar ¿que le deberíamos exigir al instrumento de medida?

Si queremos que la dispersión sea pequeña le pediremos: **PRECISION**, o sea capacidad para repetir una medida.

Si queremos que nuestro valor se acerque al valor más representativo le pediremos **RESOLUCION**, capacidad para diferenciar dos valores próximos, **SENSIBILIDAD**, capacidad de variar el valor de la medida con el cambio de la magnitud y **EXACTITUD** (debe estar libre de incertidumbres sistemáticas).

VI.5. Análisis de la bondad de los resultados: PRECISION, EXACTITUD y REPRODUCIBILIDAD.

Para determinar la bondad de un resultado experimental debemos analizar la precisión, la exactitud y la reproducibilidad del mismo.

Precisión y exactitud son dos conceptos que suelen confundirse y emplearse erróneamente. La **precisión** está relacionada con la dispersión de los valores obtenidos en un conjunto de medidas de una dada magnitud, es decir está dada por la desviación estándar de la medida.

La **exactitud** por su parte está dada por la capacidad de los instrumentos y el método de medida

para reproducir el valor de la magnitud en un sistema patrón. Esto implica que cuanto más exacta sea una medida el valor medio obtenido será más próximo al mejor valor o valor más representativo de la magnitud en las condiciones de la medida.

La **reproducibilidad** del resultado en una experiencia realizada en otro laboratorio con un instrumento similar en exactitud y precisión al empleado garantiza la validez del mismo.

VII. MEDIDAS INDIRECTAS (PROPAGACION DE INCERTIDUMBRES)

VII.1 INTRODUCCIÓN

En muchas situaciones experimentales la magnitud de interés no es medible en forma directa. Por ej.: si queremos determinar el volumen de una esfera la magnitud que podemos medir en forma directa es el diámetro, D , y al volumen lo determinaremos mediante la expresión:

$$V=(4/3) \pi (D/2)^3, \quad (\text{VII.1})$$

Con otra situación similar nos encontramos al querer determinar la velocidad de un móvil ($\mathbf{v}=\mathbf{dr}/dt$), donde las magnitudes a medir serán la variación del vector desplazamiento, $\Delta\mathbf{r}$, y el tiempo transcurrido: Δt (OJO, en este caso $\Delta\mathbf{r}$ y Δt no son las incertidumbres de las medidas sino las magnitudes medidas. ¿Cómo podremos determinar en ese casos el mejor valor y la incertidumbre de dicha magnitud?.

Podemos hacer, en primera aproximación, un análisis simple del caso de la esfera.

$$V\pm\Delta V=(1/6)\pi (D\pm\Delta D)^3 \quad (\text{VII.2})$$

esta expresión es válida si suponemos que podemos tomar a π como un número exacto (esto significa que su incertidumbre es mucho menor que las del resto de las magnitudes en juego. Si desarrollamos el miembro derecho de la igualdad anterior obtendremos:

$$V\pm\Delta V=(1/6) \pi [D^3\pm 3D^2\Delta D+3R(\Delta D)^2\pm 3(\Delta D)^3] \quad (\text{VII.3})$$

En el caso de que la incertidumbre relativa de D sea pequeña, $\Delta D/D\ll 1$, los términos tercero y cuarto del desarrollo del binomio pueden despreciarse frente al primero y al segundo. Por lo tanto:

$$V\pm\Delta V=(1/6)\pi (D^3\pm 3D^2\Delta D) \quad (\text{VII.4})$$

donde el mejor valor de V estará dado por: $(1/6)\pi$ (el mejor valor de D)³ y $\Delta V=(1/2) \pi D^2\Delta D$

VI.2. LA MAGNITUD A DETERMINAR DEPENDE DE UNA SOLA VARIABLE

En el caso más general la magnitud determinada en forma indirecta podrá ser una función arbitraria, más o menos compleja de una o más magnitudes medidas en forma directa.

¿Cómo nos manejaremos en esa situación? Podremos encontrar alguna expresión general que nos permita determinar el mejor valor y la incertidumbre, independientemente de la complejidad de la función

matemática (que sirve para expresar en lenguaje simbólico el modelo físico que relaciona las variables medidas con la magnitud a determinar)?

El análisis matemático nos dice que si una función y todas sus derivadas (de cualquier orden) están bien definidas en un punto, x_0 , podemos expresar el valor de la función en el entorno de dicho punto a partir del siguiente desarrollo en serie (llamado Serie de Taylor).

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (\text{VII.5})$$

donde $f'(x_0) = (df/dx)_{x=x_0}$; $f''(x) = (d^2f/dx^2)_{x=x_0}$; $f^{(n)}(x) = (d^n f/dx^n)_{x=x_0}$; y $h = \Delta x$.

Como estamos en el entorno del punto x_0 , h es un valor pequeño y por lo tanto podrán despreciarse el término cuadrático en h y todos los términos de orden superior. Por lo tanto la expresión anterior se reduce a:

$$\Delta f = f(x_0 \pm \Delta x) - f(x_0) \approx \pm f'(x_0) \Delta x \quad (\text{VII.6})$$

Actividades para incluir en la carpeta de informes

- Si se conoce la incertidumbre en la medida del diámetro de una esfera, el valor numérico del intervalo, ΔS , en el que está comprendido el mejor valor de la superficie de la esfera, S , y el valor numérico del intervalo ΔV en el que está comprendido el mejor valor del volumen de la misma ¿son iguales? **Explique**
- Si la magnitud medida, x , es un ángulo y la dependencia funcional es a través de la función seno, determine la incertidumbre en la magnitud derivada, mediante :

a) el desarrollo de $\sin(x \pm \Delta x) - \sin x$

b) utilizando serie de Taylor

compare los resultados obtenidos en (a) y (b).

VII.2. LA MAGNITUD A DETERMINAR DEPENDE DE VARIAS VARIABLES

En las situaciones más generales la propiedad, o estado del sistema en estudio, que interesa medir depende de dos o más medidas directas. Cuando éste es el caso podemos preguntarnos ¿cuál es la exactitud y credibilidad de la magnitud derivada si conocemos las de cada una de las medidas directas de las cuales depende?. Por simplicidad comencemos por analizar el caso de una magnitud u que depende de las propiedades medidas en forma directa de dos variables, x e y , es decir:

$$u = F(x,y) \quad (\text{VII.7})$$

Suponemos que la función F es continua y derivable. Para cada par de valores medidos X_i e Y_i tendremos un valor de la U_i de la función u , dado por:

$$U_i = F(X_i, Y_i)$$

Lo primero que tenemos que determinar es si las medidas x e y son totalmente independientes. Por ejemplo las medidas de distancia y tiempo realizadas para determinar una velocidad son independientes. En cambio si utilizáramos la misma regla para medir los lados de una mesa, cuya superficie queremos determinar, ambas medidas estarán afectadas por las mismas incertidumbres sistemáticas, de apreciación,

de paralaje etc. Es decir estarán al menos parcialmente correlacionadas.

Supongamos que las magnitudes que estamos determinando son tales que las medidas directas son totalmente independientes, como en el caso de la variación del vector posición y el intervalo de tiempo. En general tendremos un conjunto de N medidas de la magnitud x y un conjunto de N' medidas de la magnitud y. Supongamos, por simplicidad, que los dos conjuntos son de N medidas y que las desviaciones $d_{xi}=X_i - \langle x \rangle$ y $d_{yi}=Y_i - \langle y \rangle$ son pequeñas. Si no están correlacionadas deberá cumplirse:

$$\sum d_{xi} d_{yi} \approx 0$$

En este caso se puede demostrar que si ambas medidas responden a una distribución de Gauss

$$\sigma_u = [(\partial u / \partial x)^2 \sigma_x^2 + (\partial u / \partial y)^2 \sigma_y^2]^{1/2} \quad (\text{VII.8})$$

el símbolo $(\partial u / \partial x)$ se denomina derivada parcial de primer orden de la función u respecto de x. Esto significa que para hacer el cálculo se supone que la única magnitud variable es x (si u depende de otras variables, en este caso y, para hallar la derivada se la toma como constante). Esta definición puede extenderse a todas las variables de las cuales dependa u. El valor de las derivadas parciales debe obtenerse reemplazando en las expresiones $(\partial u / \partial x)$ y $(\partial u / \partial y)$ las variables x e y por los valores que mejor representen a dichas magnitudes, es decir $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ respectivamente.

En el caso más general en el que la función u dependa de n variables la ecuación (VII.8) tomará la forma:

$$\sigma_u = [(\partial u / \partial x_1)^2 \sigma_{x1}^2 + (\partial u / \partial x_2)^2 \sigma_{x2}^2 + \dots + (\partial u / \partial x_n)^2 \sigma_{xn}^2]^{1/2} \quad (\text{VII.9})$$

Cada uno de los términos de la expresión anterior nos informa cómo contribuye el intervalo de incertidumbre de cada una de las variables, σ_{xi} , en el intervalo de incertidumbre de la magnitud derivada, σ_u . Es muy importante analizar esta influencia al planificar un experimento para determinar cuál o cuáles magnitudes deben ser medidas con más cuidado o con mayor estadística a fin de disminuir el intervalo de incertidumbre de la magnitud que debemos determinar en forma indirecta.

EJEMPLO:

Se desea determinar la velocidad de un móvil. Para ello se procedió a medir el cambio de su vector posición, Δr , y el intervalo de tiempo en el que se produjo dicho cambio, Δt . Completada la medida tendremos determinados el mejor valor de Δr : $\langle \Delta r \rangle$, y el mejor valor de Δt : $\langle \Delta t \rangle$, y las correspondientes desviaciones estándar, $\sigma_{\Delta r}$ y $\sigma_{\Delta t}$, respectivamente. En este caso la función u será la velocidad v, y las variable x e y serán Δr y Δt , respectivamente.

La función que las relaciona es

$$v = \Delta r / \Delta t$$

por lo tanto

$$\sigma_v = \{ [\partial v / \partial (\Delta r)]^2 \sigma_{\Delta r}^2 + [\partial v / \partial (\Delta t)]^2 \sigma_{\Delta t}^2 \}^{1/2} \quad (\text{VII.10})$$

Procedamos a calcular las derivadas parciales. Para calcular $\partial v / \partial (\Delta r)$ tratamos a Δt como una constante. Por lo tanto obtendremos:

$$\partial v / \partial (\Delta r) = \partial (\Delta r / \Delta t) / \partial (\Delta r) = 1 / \Delta t \quad (\text{VII.11})$$

Para calcular $\partial v / \partial(\Delta t)$ tratamos a Δr como si fuera una constante

$$\partial v / \partial(\Delta t) = \partial(\Delta r / \Delta t) / \partial(\Delta t) = - \Delta r / (\Delta t)^2 \quad (\text{VII.12})$$

Utilizando las expresiones VII.9, VII.10, VII.11 obtenemos σ_v :

$$\sigma_v = \{ (\langle \Delta t \rangle)^2 \sigma_{\Delta r}^2 + [\langle \Delta r \rangle / (\langle \Delta t \rangle)^2]^2 \sigma_{\Delta t}^2 \}^{1/2} \quad (\text{VII.13})$$

VIII. DISCREPANCIA

Si una magnitud física ha sido medida con dos (o más) métodos o por distintos observadores, es posible (y muy probable) que el mejor valor de las medidas no coincida. Sin embargo, esta discrepancia entre los valores más representativos de la medida no nos autoriza a decir que los resultados sean diferentes. Recordemos que una medición no nos da como resultado un número sino un intervalo. Ese intervalo (en el caso de que podamos suponer una distribución normal o de Gauss) nos dice que tendremos una cierta probabilidad de, si volvemos a realizar la medida en las mismas condiciones, encontrar el nuevo resultado comprendido en dicho intervalo. La probabilidad será el 96% del total si consideramos como resultado el intervalo comprendido entre

$$-2\sigma + \langle x \rangle, \quad +2\sigma + \langle x \rangle \quad (\text{VIII.1})$$

por lo tanto si los resultados de dos medidas son:

$$x_1 = \langle x_1 \rangle \pm \Delta_N x_1 \quad x_2 = \langle x_2 \rangle \pm \Delta_N x_2 \quad (\text{VIII.2})$$

Decimos que con un límite de confianza del 68% las mediciones son distintas si:

$$|\langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle| \geq \Delta_N x_1 + \Delta_N x_2$$

y que con un límite de confianza del 96% las mediciones son distintas si:

$$|\langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle| \geq 2(\Delta_N x_1 + \Delta_N x_2) \quad (\text{VIII.3})$$

Estos criterios pueden generalizarse para intervalos de confianza mayores en forma similar. También se aplican cuando se comparan valores obtenidos en el laboratorio con valores tabulados o publicados.

De manera similar actuaremos para analizar la bondad del modelo analítico que decidamos que es el que mejor describe nuestro sistema. Si nuestro modelo es válido predecirá adecuadamente el valor de alguna magnitud como función del tiempo o al modificarse alguna variable. ¿Cómo validaremos el modelo? Comparando el valor predicho por el mismo con el resultado del proceso de medición, a tal fin utilizaremos los criterios VIII.2 y VIII.3 para comparar ambos valores.

IX. OBTENCION DE RELACIONES FUNCIONALES ENTRE MAGNITUDES

IX 1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE DATOS PROVENIENTES DE LA MEDIDA DE UNA MAGNITUD FÍSICA

Habíamos visto que para poder entender los fenómeno o procesos que tienen lugar en un dado sistema necesitamos encontrar las variables que le producen modificaciones (entradas, e) e identificar cómo responde dicho sistema (salidas, s) frente a cambios de las variables. Esto significa encontrar la función matemática que relaciona las entradas y con la salida, es decir encontrar la relación funcional: $s = f(e)$.

Supongamos ahora que estamos estudiando un sistema particular para el cuál la magnitud m_1 constituye la variable de entrada, e , y la m_2 la respuesta del sistema, s . Siguiendo los pasos del proceso de medición elegimos el o los instrumentos más adecuados para determinar los valores de m_1 y m_2 y realizamos las medidas. En la primera instancia registramos los datos en la Tabla IX.1..

Tabla IX.1. Valores obtenidos de las magnitudes m_1 y m_2 .

	Entrada	Salida
número de medida	m_1 (unidades)	m_2 (unidades)
1	0	0
2	50	50
3	100	100

Recordemos que nuestro objetivo es encontrar la función que relaciona m_1 con m_2 , a tal fin parece más conveniente realizar una representación gráfica en la que m_1 esté en abscisas y m_2 en ordenadas como se muestra en la Figura IX.1.

La Figura IX.1 parecería mostrar que los datos están sobre una línea recta. Podemos preguntarnos: si uniéramos los puntos con una recta y realizáramos nuevas medidas de m_1 , digamos con $0 < m_1 < 50$ ¿Los valores que se obtengan de m_2 serán tales que caigan sobre dicha recta?. Esta pregunta equivaldría a preguntarnos: ¿Son los tres datos obtenidos suficientes para obtener una función $m_2 = f(m_1)$ confiable. Es decir que prediga adecuadamente para el rango de valores de m_1 comprendido entre los valores extremos medidos ($0 < m_1 < 120$) el valor esperable de m_2 .

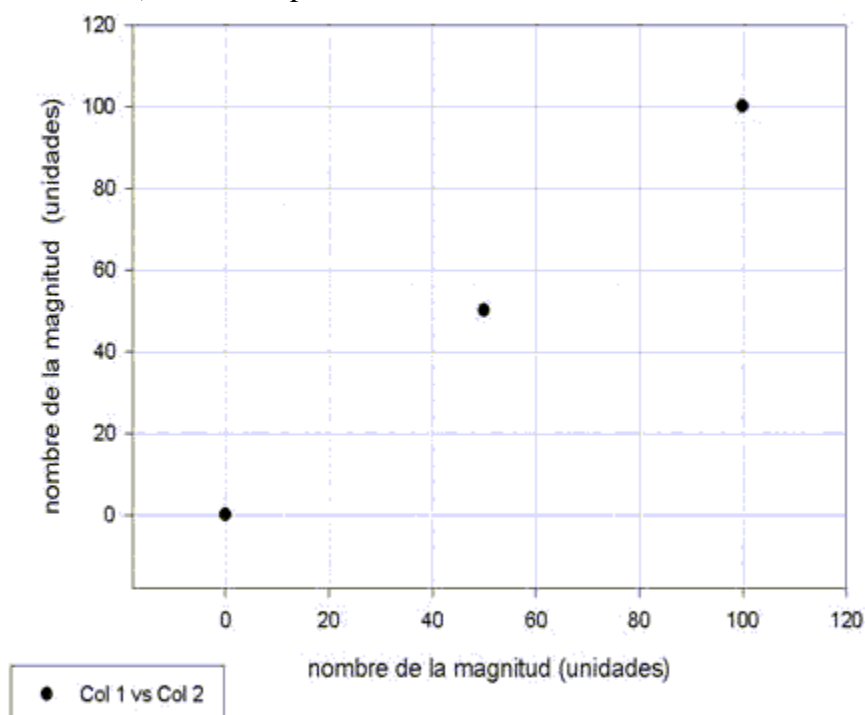


Figura IX.1. Representación gráfica de m_2 en función de m_1

Veamos qué obtenemos al realizar las medidas intermedias que se muestran en la siguiente Tabla:

	Entrada	Salida
número de medida	m_1 (unidades)	m_2 (unidades)
1	0	0
2	10	9.7
3	20	20.5
4	30	29.7
5	40	40
6	50	49
7	60	61.5
8	70	74
9	80	80
10	90	88
11	100	100

Tabla IX.2. Valores intermedios obtenidos para las magnitudes m_1 y m_2 .

Si graficamos los datos de la tabla precedente obtenemos la Figura IX.2. Si unimos los puntos de la Figura IX.2 con segmentos obtendremos la Figura IX.3.

Una mirada a esta última figura nos muestra que si bien las magnitudes m_1 y m_2 parecerían guardar una relación lineal, no parece tan claro a partir de la figura cuál es la recta que representa dicha relación. Podemos preguntarnos entonces:

a) ¿Cuál es la función que mejor representa la relación entre ambas magnitudes?

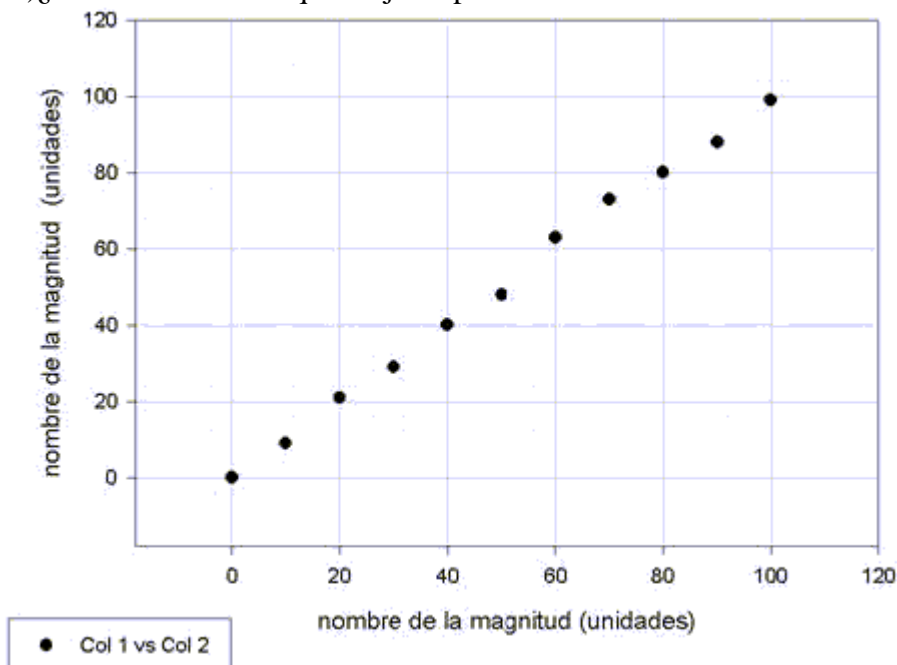


Figura IX.2 Representación gráfica del nuevo conjunto m_2 en función de m_1

- b)¿Cómo la obtenemos?
- c)¿Cómo la informamos?

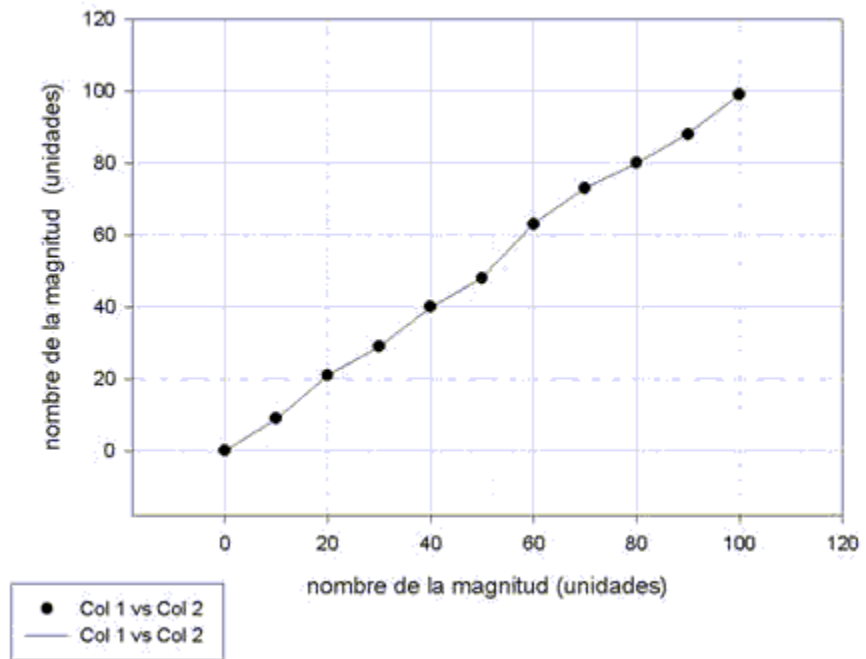


Figura IX.3. Representación gráfica de los datos contenidos en la Tabla IX.2. Se supone una relación lineal entre puntos sucesivos

IX. 2. OBTENCIÓN DE LA MEJOR RELACION LINEAL ENTRE DOS MAGNITUDES

IX.2.1. Aproximación gráfica.

Como primer paso en esta dirección podríamos trazar una recta que interpole nuestros puntos experimentales, esto es que pase por el mayor número de puntos posibles y deje la misma cantidad de puntos por encima y por debajo como se muestra en la Figura IX.4. La recta podremos expresarla como:

$$m_2 = A m_1 + B \tag{IX.1}$$

donde A es la pendiente y B la ordenada al origen

Algún alumno atento ya se habrá preguntado: ¿dónde las tuvimos en cuenta las incertidumbres en las medidas de m_1 y m_2 ?...y tendría razón, no las tuvimos en cuenta. Las tablas anteriores no están completas, falta agregarle a cada dato cuál es la incertidumbre. Por lo tanto la presentación anterior de los datos, tanto en forma de tabla como gráfica es incompleta o mejor aún incorrecta.

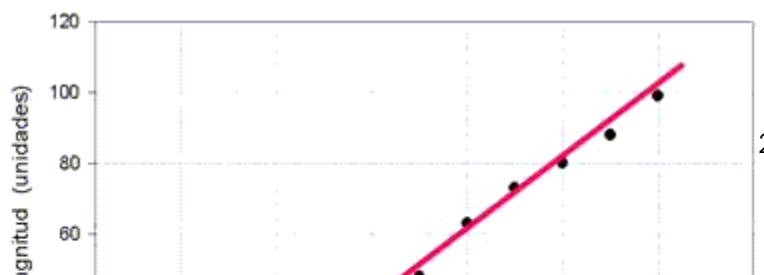


Figura IX.4. Representación gráfica de los datos de la Tabla IX.3. En rojo: recta que representa la relación funcional

Construyamos, entonces, ahora adecuadamente, la Tabla IX.2 y la Figura IX.4.

Tabla IX.4. Valores obtenidos de las magnitudes m_1 y m_2 . Incertidumbre en paréntesis

	Entrada	salida
Número de medida	m_1 (unidades)	m_2 (unidades)
1	0(0.2)	0(0.1)
2	10(0.2)	9.7(0.1)
3	20(0.2)	20.5(0.1)
4	30(0.2)	29.7(0.1)
5	40(0.2)	40(0.1)
6	50(0.2)	49(0.1)
7	60(0.2)	61.5(0.1)
8	70(0.2)	74(0.1)
9	80(0.2)	80(0.1)
10	90(0.2)	88(0.1)
11	100(0.2)	100(0.1)

En la Figura IX.5 la representación de cada valor medido corresponde a un rectángulo que indica la incertidumbre de la medida de ambas variables

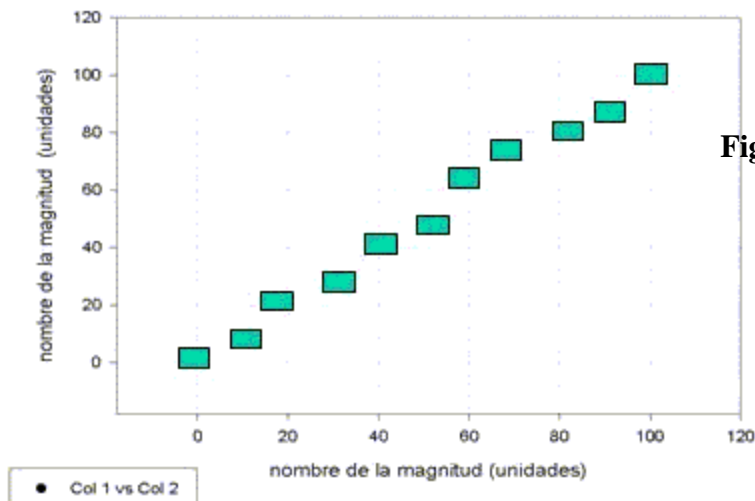


Figura IX.5. Representación gráfica de los datos de la Tabla IX.4.

¿Cómo construimos a la recta que pueda representar a la relación funcional entre la entrada, m_1 , y la salida, m_2 ? Debería ser una recta que pase por todos los rectángulos. La relación funcional estaría dada por:

$$m_2 = A m_1 + B \quad (IX.2)$$

donde A y B no pueden ser números exactos sino intervalos de la forma $A \pm \Delta A$, $B \pm \Delta B$, dado que la recta debe construirse a partir de datos experimentales que están afectados de incertidumbre. Los coeficientes de la recta expresada en la ecuación IX.2 no serán por lo tanto números sino intervalos ¿cómo los obtenemos? ¿Cómo expresaremos a la mejor función que represente al conjunto de datos presentado en la Tabla IX.4?

Aproximación gráfica. Podemos buscar las rectas de mayor y menor pendiente que pasen por el mayor número posible de rectángulos. A partir de éstas podremos obtener la recta promedio, como semisuma de las otras dos. Al intervalo en el que estarán comprendidas la pendiente y la ordenada al origen de dicha recta promedio lo obtendremos a partir de la semidiferencia de las rectas de máxima y mínima pendiente.

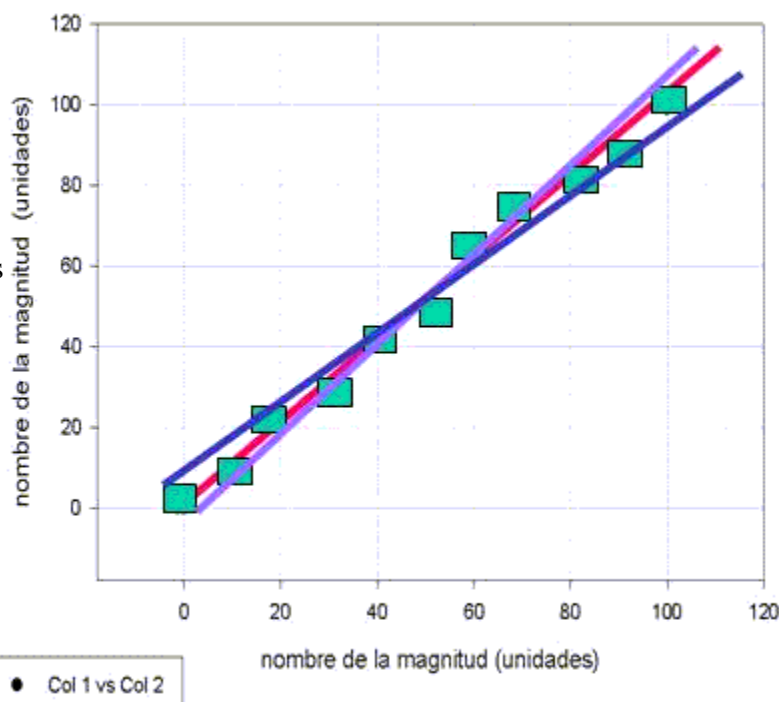


Figura IX. 6. Representación de los datos de la Tabla IX.3. Se muestran las rectas de máxima pendiente (—■—), de mínima pendiente (.....) y la promedio (—).

A la línea recta de máxima pendiente de la Figura IX.6 podemos representarla por la función:

$$m_2 = A_1 m_1 + B_1 \quad (IX.3)$$

y a la de mínima pendiente por la función:

$$m_2 = A_2 m_1 + B_2 \quad (IX.4)$$

Si hacemos la semisuma de las expresiones (IX.3) y (IX.4) obtendremos los coeficientes, A y B, de la recta promedio. Mientras que la semidiferencia de (IX.3) y (IX.4) nos dará el intervalo de incertidumbre, ΔA y ΔB .

Por lo tanto el mejor conjunto de rectas que nos informan el intervalo en el que podremos esperar que caiga una nueva medida, estará dado por la expresión:

$$m_2 = (A \pm \Delta A)m_1 + (B \pm \Delta B) \quad (\text{IX.5})$$

En la que

$$A = (A_1 + A_2) / 2 \quad B = (B_1 + B_2) / 2 \quad (\text{IX.6})$$

$$\Delta A = (A_1 - A_2) / 2 \quad \Delta B = (B_1 - B_2) / 2 \quad (\text{IX.7})$$

Ejercicio: Grafique las cuatro rectas que surgen de tomar todas las combinaciones posibles de signos en la expresión IX.5 y analice la franja de valores posibles para la relación entre m_1 y m_2 .

IX2.2 Obtención analítica. Método de cuadrados mínimos.

Supongamos que nuestros datos y sus correspondientes incertidumbres nos permiten realizar el siguiente gráfico. ¿Cómo podríamos obtener analíticamente la recta que mejor represente al conjunto?

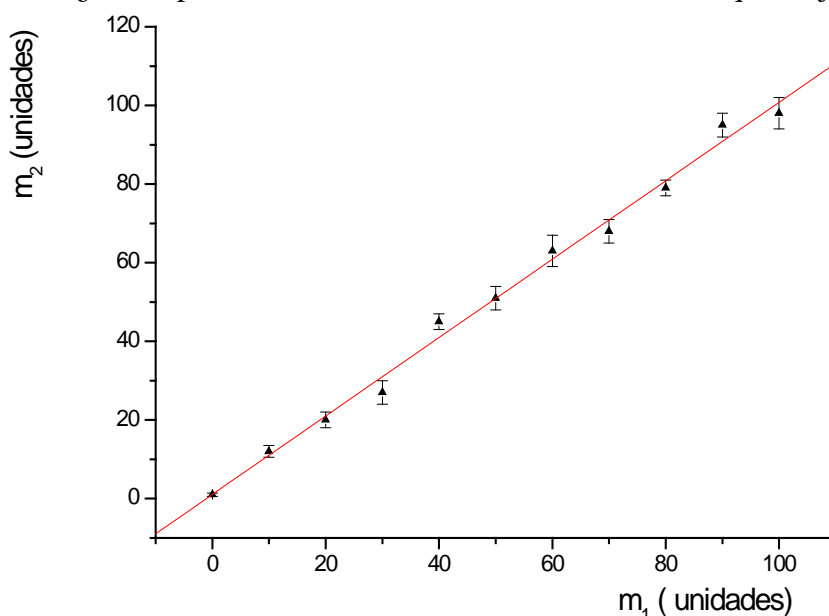


Figura IX.6. Representación gráfica de un conjunto de datos (m_1, m_2).

Agrandemos una porción del gráfico anterior y veamos cuál es la diferencia entre alguno de los datos y la función que esperamos sea la que mejor represente a la relación funcional entre m_1 y m_2 . La diferencia entre el valor medido m_{2i} y la función de ajuste $f(m_{1i})$ (marcada con la doble flecha en el gráfico, Figura IX.7) constituye el apartamiento de dicha medida del valor predicho por el modelo.

El modelo puede ser matemático (estamos estudiando un sistema del que no conocemos la respuesta y la función que mejor parece representarlo es la lineal) o físico. Este último caso significa que estamos analizando un sistema cuyo comportamiento esperamos que sea lineal porque ya hemos estudiado uno similar previamente o porque la información proveniente de la literatura indica que podría esperarse un comportamiento lineal (por ej cuando se carga un resorte con distintas masas).

La desviación de cada valor medido del valor predicho por el modelo y dado por la función será:

$$D_i = f(m_{1i}) - m_{2i}$$

Lo que nos interesará es que estas desviaciones sean lo más chicas posibles. Como las desviaciones D_i pueden ser tanto positivas como negativas nos conviene definir a la función

$$\chi^2 = \sum D_i^2 = \sum [f(m_{1i}) - m_{2i}]^2 \quad (\text{IX.8})$$

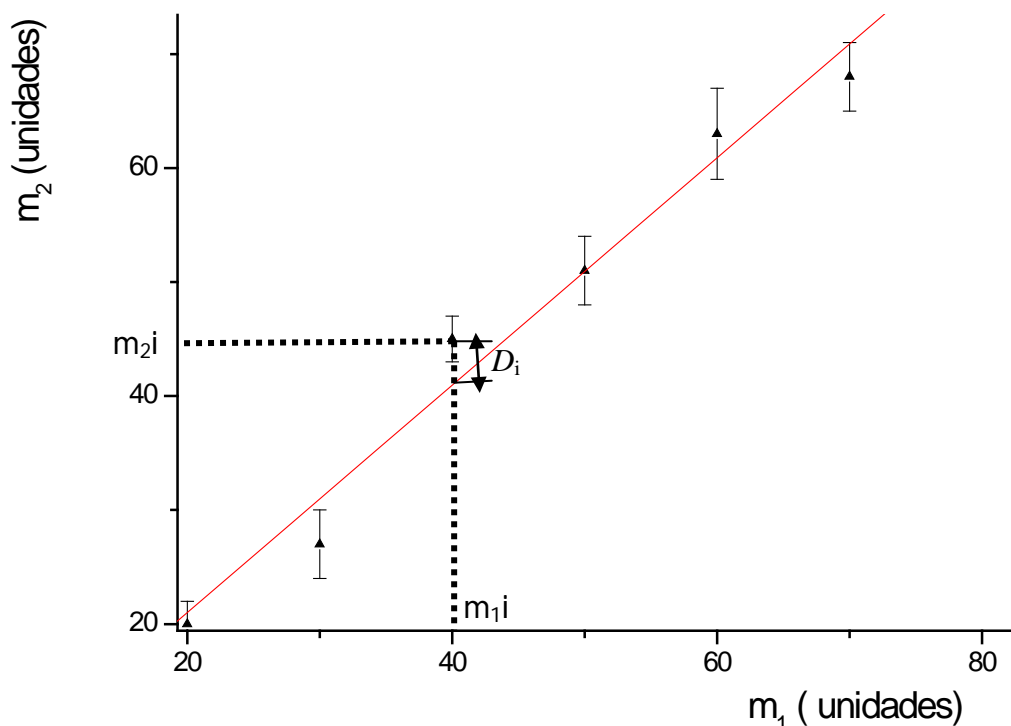


Figura IX.7. Vista del apartamiento del valor medido, m_{2i} , del valor predicho por el modelo.

El algoritmo matemático que nos permite encontrar las constantes A y B que determinan la recta, minimizando a la función (IX.8) es el método que se conoce como de cuadrados mínimos, que implica minimizar χ^2 . En los casos, como el presente, en el que los datos pueden ser descritos por una recta, la función que relaciona m_2 con m_1 es de la forma: $m_2 = f(m_1) = A m_1 + B$. Los mejores coeficientes A y B serán aquellos que minimicen a la expresión IX.8. Es decir se pretende que los valores de A y B minimicen:

$$\chi^2 = \sum [A m_{1i} + B - m_{2i}]^2$$

tenga el valor mínimo. Esto implica que las derivadas de esta función respecto de A y B deben ser cero

$$\frac{\partial(\sum [A m_{1i} + B - m_{2i}]^2)}{\partial A} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial(\sum [A m_{1i} + B - m_{2i}]^2)}{\partial B} = 0$$

Se obtiene así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas A y B. Se pueden determinar las incertidumbres de A y B.

Este método es más general y permite ajustar cualquier tipo de función si se tiene un número suficiente de datos experimentales.

APENDICE 1.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

¿Cómo determinarlas en un caso concreto?

Volvamos al ejemplo de la velocidad. Si obtuvimos los valores de Δr y Δt que se dan a continuación

$$\Delta r = (6,6 \pm 0,4) \text{ cm, en la dirección de las } x \text{ positivas}$$

$$\Delta t = (2,27 \pm 0,01) \text{ s}$$

Para calcular la velocidad, v , debemos realizar el cociente de $\Delta r / \Delta t$. Si utilizamos una calculadora obtendremos para el módulo de v :

$$v = 6,6 \text{ cm} / 2,27 \text{ s} = 2,907488987 \text{ cm/s.}$$

que corresponde al mejor valor de dicha magnitud. ¿Tiene sentido dar el resultado con este número de cifras? ¿Qué información nos dan? ¿Podemos con un número menor de cifras tener la misma información?. Para responder estos interrogantes necesitamos primero determinar el intervalo de incertidumbre de v . Empleando la relación obtenida en VI.13

$$[(1/5,1529 \text{ s}^2) 0,16 \text{ cm}^2 + (6,6 \text{ cm}^2 / 5,1529 \text{ s}^2)^2 0,0001 \text{ s}^2]^{1/2} \quad (\text{VI.14})$$

Nota: al ir haciendo los cálculos recordar que el resultado de la medida de una magnitud física y la desviación estándar, siempre deben ir acompañados de la correspondiente unidad de medida. Por lo tanto en todos los pasos del cálculo de la incertidumbre verificar que las unidades sean las correctas.

Continuemos con el cálculo planteado en VI.14

$$\sigma_v = \{ (0,19406547769217333928467464922665) 0,16 \text{ cm}^2/\text{s}^2 + [6,6 (0,19406547769217333928467464922665) \text{ cm}^2/\text{s}^2] 0,0001 \text{ s}^2 \}^{1/2} =$$

$$\{ 0,031050476430747734285547943876264 \text{ cm}^2/\text{s}^2 + 0,00016405310035651906032021633876677 \text{ cm}^2/\text{s}^2 \}^{1/2} = 0,1766763411753374899107881254055 \text{ cm/s}$$

Este resultado es la desviación estándar de la velocidad. Este valor está comprendido en el intervalo 0,17-0,18. Teniendo en cuenta el significado de la desviación estándar, es decir teniendo en cuenta que es el intervalo en el que tenemos un 68% de confianza en obtener el valor en una medida subsiguiente parecería razonable adoptar el extremo superior del intervalo

$$\sigma_v = 0,18 \text{ cm/s} \quad (\text{VI.15})$$

de modo que el resultado de nuestra medida podemos escribirlo

$$v = (2,907488987 \pm 0,18) \text{ cm/s.}$$

igualdad que nos está diciendo que el valor esperable para una medida subsiguiente va a estar en el intervalo:

$$2,727488987 \text{ cm/s} < v < 3,087488987 \text{ cm/s} \quad (\text{VI.16})$$

Si tomamos v con dos decimales y tenemos en cuenta que la tercera cifra decimal de v es 7 nos quedaría $v = 2,91$ en cuyo caso el intervalo de confianza de la medida se puede expresar como:

$$2,73 \text{ cm/s} < v < 3,09 \text{ cm/s} \quad (\text{VI.17})$$

que comprende al intervalo anterior, expresión VI.16. Por lo tanto la probabilidad de que la próxima medida esté en el intervalo expresado en VI.17 no será menor que la probabilidad de que esté en el intervalo dado en VI.16. Esto significa que incluir más decimales en el mejor valor de v no nos agrega ninguna información.

El resultado de la determinación de v podemos entonces expresarlo

$$v = (2,91 \pm 0,18) \text{ cm/s}$$

Con el mismo razonamiento sería igualmente válida la siguiente expresión:

$$v = (2,9 \pm 0,2) \text{ cm/s}$$

Si la segunda cifra decimal de v fuera mayor que cinco deberíamos tener en cuenta que el número más cercano a por ej 2,97 con una sola cifra decimal es 3,0.

Es importante tener en cuenta este criterio de truncado toda vez que realizamos una operación usando una calculadora o computadora.

Analicemos las desviaciones estándar porcentuales.

$$\sigma_{\Delta r} \% = (\sigma_{\Delta r} / \Delta r) 100 \% = 0,6\% \quad \text{y} \quad \sigma_t \% = 0,4\%.$$

Si no efectuamos el redondeo

$$\sigma_v \% = (\sigma_v / v) 100\% = 0,060765953702763755270171940088934 \cong 0.061\%$$

Con el redondeo que hemos efectuado

$$\sigma_v \% = 0,061855670103092783505154639175258 \cong 0.062\%$$

Número π : Sabemos que el perímetro (p) de un círculo está relacionado con su diámetro (d) por la expresión $p = \pi d$, por lo tanto midiendo el diámetro y perímetro de un círculo es posible “medir π ”. Diseñe un experimento que le permita realizar esta medición. Obtenga π con este método. Dé el intervalo de confianza de dicho valor. Compare su resultado con los valores tabulados de esta constante. Consulte en la bibliografía otros métodos de obtener π experimentalmente.

BIBLIOGRAFIA GENERAL

Arley, N. y Buch, R. *Introducción a la teoría de la probabilidad y de la estadística*. Editorial Alambra, S. A. Madrid (1968).

Baird, D. C. *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Prentice Hall Hispanoamericana, México. (1991).

Gil, S. y Rodriguez, E. *Física Re-Creativa. Experimentos de Física usando nuevas tecnologías*. Prentice-Hall. Pearson Education. S.A.. Buenos Aires 2001.

Parrat, L. G. *Probability and Experimental uncertainty in Science*. John Wiley & Sons, Inc., New York (1961).

Topping, J. *Incertezas of observation and their treatment*. Chapman & Hall. Science Paperbacks. London (1972).

Para consultar en la WEB

International Organization for Standardization (ISO 3534-1993) pagina de Internet del National Institute of Standard and Technology (NIST) de USA. (<http://www.nist.gov/>, en particular en el sitio URL: <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty>). La institución equivalente en la República Argentina es el Instituto de Tecnología Industrial (INTI: <http://www.inti.gov.ar/cefis/>).

<http://www.fisicarecreativa.com/>

tutorial (en Inglés) <http://phoenix.phys.clemson.edu/tutorials/excel/regression.html>

http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/medidas/medidas_indice.htm