VALOR MEDIO Y DESVIACION ESTANDAR DE UNA SERIE DE MEDIDAS

Si medimos *N* veces la magnitud de interés obtendremos los *N* datos experimentales:

$$x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_N$$

La media aritmética de las *N* medidas (valor medio o promedio) será:

$$< x > \; = (x_1 + x_2 + x_3 + ...+ x_N)/N$$

$< x >$ es el mejor valor de la medida (el que minimiza la dispersión en torno a él)

¿Cómo cuantificamos la dispersión de valores?

La <u>desviación cuadrática media</u>, o **varianza S^2:**

$$S^2 = [\Sigma\, (x_i - \langle x \rangle)^2 / N$$

(varianza, promedio de las desv.cuadráticas)

Para comparar con el valor medio usamos:

$$S = [\, \Sigma\, (x_i - \langle x \rangle)^2 / N]^{½}$$

S, **desviación estándar**, es la raíz cuadrada de la desviación cuadrática media (o varianza). Porque S tiene la misma dimensión que la variable observada.

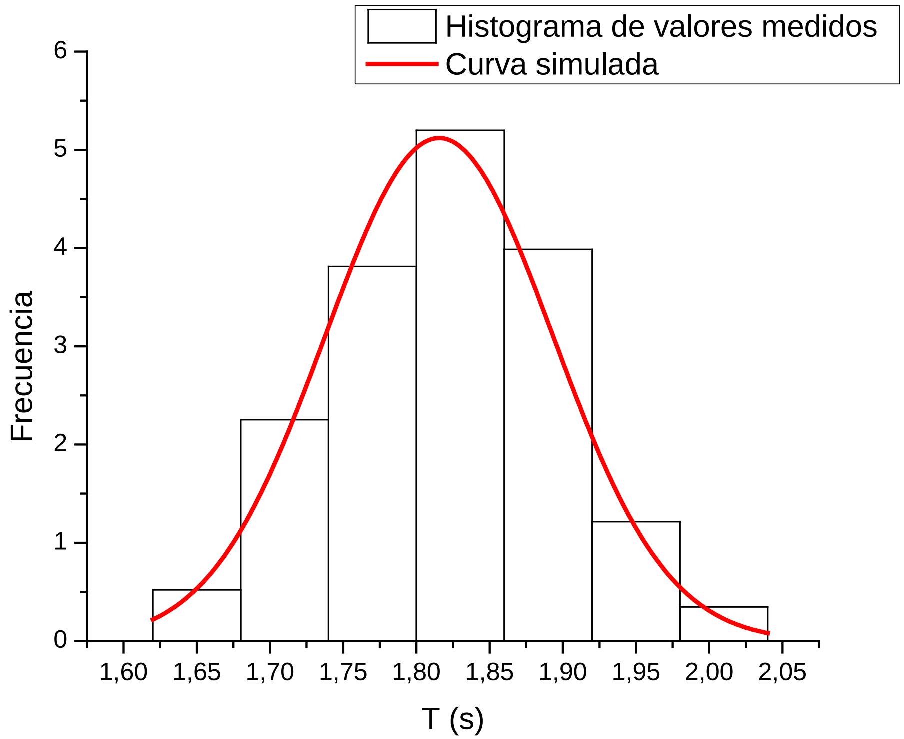
En realidad la expresión correcta de la desviación estándar es:

$$S = [\, \Sigma\, (x_i - \langle x \rangle)^2 / (N-1)]^{½}$$

(para un solo evento N=1, S da infinito)

Si realizamos un histograma con los valores medidas (para N tendiendo a infinito), vemos que a medida que aumenta el número de medidas, la función de probabilidad f(x) tiende a la función Normal o Gaussiana:

$$f\,(x) = 1\,/\,[S(2\pi)^{1/2}]\;exp\,[-(x-\langle x\rangle)^2/2S^2]$$



Si realizo una nueva medida habrá un

68.3% de probabilidad que ésta esté comprendida en <x>±S,

95.45 % en <x>±2S

99.73 % en <x>±3S.

Pero vemos que en el valor de S, influyen errores casuales, relacionados con el metodo de medida y queremos acotar más en intervalo donde es probable que se encuentre el valor verdadero de la magnitud observada.

Podríamos, volver a repetir la serie nuevamente (N medidas) y obtendríamos un valor diferente del valor medio.

Esto lo podríamos repetir muchas veces (M veces). Para cada serie de medidas tendremos un valor medio:

$$\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \ldots \langle X_M \rangle$$

Si hago un histograma de valores medios, veré que la forma es la de una distribución normal pero con una dispersión mucho mas pequeña que la de las medidas individuales (σ) y tendré mas acotado el valor de la magnitud observada.

Esto implica que una nueva muestra (M+1) tiene un 68.3% de probabilidad de estar comprendida en el intervalo $<X> \pm \sigma$ y un *95.45 %* de estar en el intervalo $<X> \pm 2\sigma$.

Entonces el intervalo:

$$x = <X>_i \pm \sigma$$

incluye al mejor valor (con un 68% de probabilidad).

TRATAMIENTO DE “VARIAS (M) SERIES DE N MEDIDAS” DE UNA MISMA MAGNITUD.

$$(\Sigma\langle x\rangle_i) / M = \langle X\rangle$$

promedio de los promedios

Si consideramos a los promedios de cada serie como datos individuales de una serie de *M* mediciones podremos determinar la desviación estándar, que notaremos σ, para esa serie (o sea la desviación estándar de los promedios)

De acuerdo con la definición de desviación estándar (S):

$$\sigma = [\ \Sigma(\langle x\rangle_i - \langle X\rangle)^2 / M\ ]^{1/2}$$

desviación estándar de los promedios o desviación estándar de la media.

La teoría estadística demuestra que σ puede expresarse en términos de las desviaciones de cada una de las series de N medidas mediante la ecuación

$$\sigma = \{ \Sigma d_i^2 / N (N-1) \}^{1/2} = S / N^{1/2}$$

donde S es la desviación estándar de una de las M series de medidas.

Es un resultado práctico muy poderoso !!

No tengo que hacer muchas series de N medidas para calcular la desviación estandar del promedio, basta con una única serie de N medidas!

Hay 68.3% de probabilidad de que el mejor valor de la magnitud observada esté comprendida en el intervalo

$<X> \pm \sigma$

un *95.45 %* de estar en el intervalo $<X> \pm 2\sigma$

Y un *99.73 %* de estar en el intervalo $<X> \pm 3\sigma$

σ : desviación estandar del promedio representa la incertidumbre debido a fluctuaciones (o errores casuales) de la magntidud observada.

Pero no debemos olvidar que también tenemos la incertidumbre nominal (resolución del instrumento, exactitud, etc)

Receta práctica para el tratamiento de incertidumbres en una medición real

Si:

N = 1 $x_m \pm \Delta x_N$

donde x_m: valor medido

Δx_N : incertidumbre nominal

$$\Delta x_N = [(\Delta s)^2 + (\Delta a)^2 + (\Delta d)^2 + (\Delta i)^2]^{1/2}$$

N < 10 $\langle x_i \rangle \pm \Delta x = [(\Delta X_N)^2 + (\Delta X_f)^2]^{1/2}$

donde ΔX_f estima la incertidumbre máxima debida a las fluctuaciones, a partir del valor mayor medido – el valor menor medido.

N > 10 $\langle x_i \rangle \pm \Delta x = [(\Delta X_N)^2 + (\sigma)^2]^{1/2}$

con σ , la desviación estándar del promedio

DETERMINACIÓN DE LA DESVIACION ESTANDAR DEL PROMEDIO

$$\sigma = [(\Sigma\ (x_i - \langle x_i \rangle)^2)]/N(N-1)]^{1/2} = S / \sqrt{N}$$

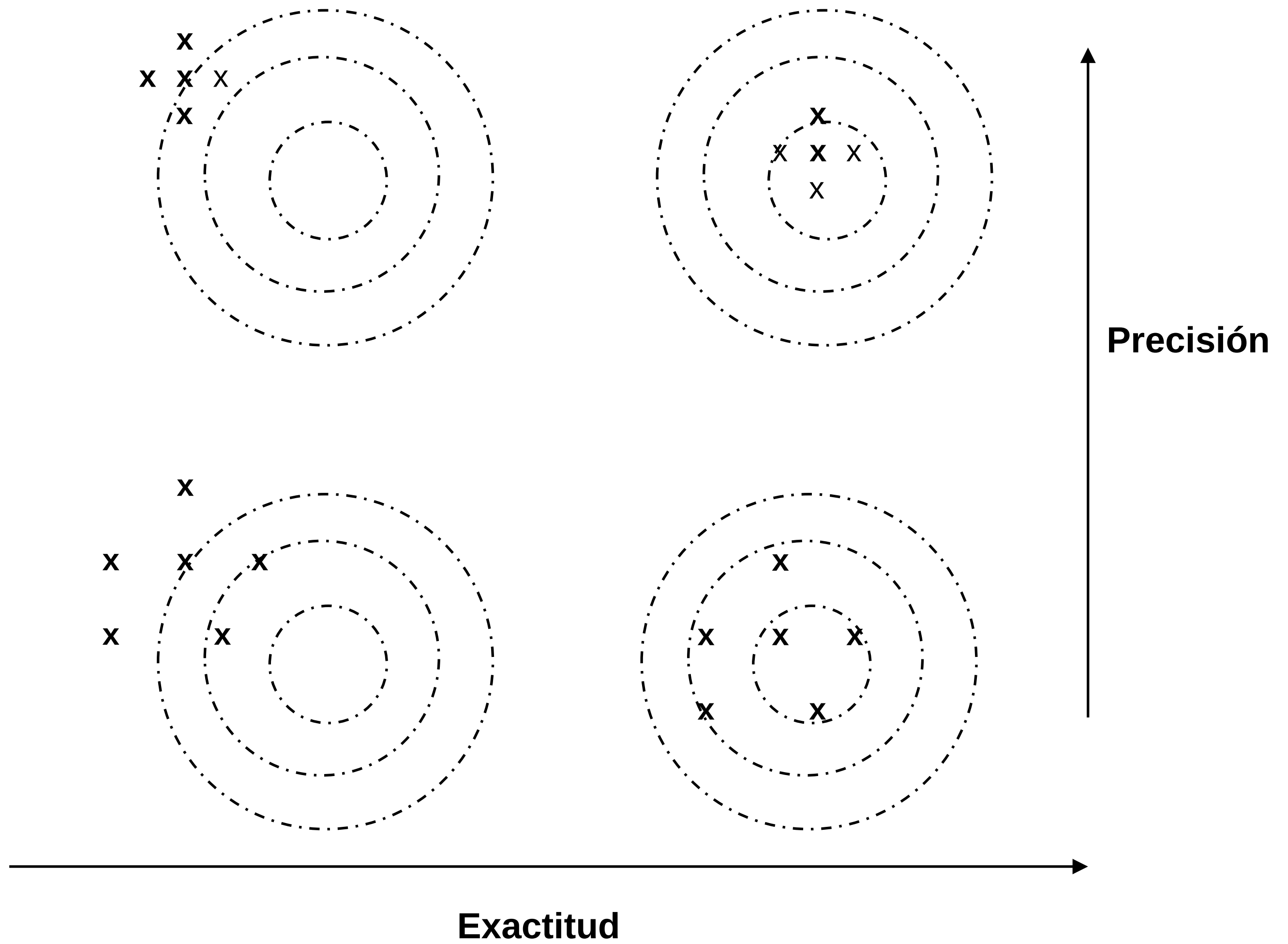
La desviación estándar S (que me habla de la dispersión o precisión de la medida) NO disminuye con N).

CONSECUENCIA → En cualquier proceso de medida cuanto mayor sea el número de observaciones N mas pequeño será σ

¿Cuántas medidas es necesario que haga? ¿Cuan pequeño quiero que sea σ*, teniendo en cuenta que también tengo la incertidumbre nominal?*

Precisión (de un instrumento o método de medida): está asociada a la capacidad de reproducibilidad (repetición) del resultado de una dada magnitud con dicho instrumento o método (baja dispersión de resultados). O sea S pequeño…

Exactitud (de un instrumento o método): está asociada a la calidad de calibración del mismo.


Precisión
Exactitud

Teniendo en cuenta nuestra experiencia y todo lo discutido volvamos a pensar ¿que le deberíamos exigir al instrumento de medida?

PRECISION: o sea capacidad para repetir una medida, si queremos que la dispersión sea pequeña (S pequeño, luego σ pequeño)

Si queremos que nuestro valor se acerque al valor verdadero le pediremos:

RESOLUCION: capacidad para diferenciar dos valores muy próximos.

SENSIBILIDAD: capacidad de variar el valor de la medida con el cambio de la magnitud.

EXACTITUD: que esté libre de incertidumbres sistemáticas (bien calibrado).