# Análisis de Señales
# Curso 2017

## Transformada de Fourier en TC

# TF en TC

- Derivación del par TF de TC
- Ejemplos de TF
- Propiedades de la TF en TC

# Derivación

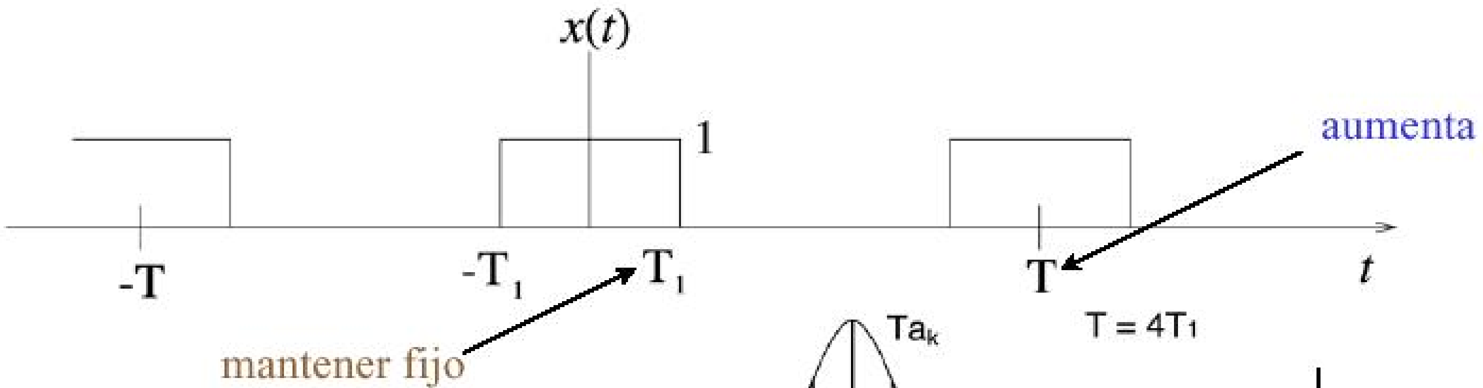
- La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones periódicas $f(t)$.
- ¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones no periódicas?

# Derivación

- Sea $x(t)$ una señal aperiódica. Pensemos como el límite de una señal periódica que $T \longrightarrow$ ã
- Para una señal periódica las componentes armónicas están separadas $w_0$=2®/$T$
- Como $T \longrightarrow$ ã, $w_0 \longrightarrow 0$ y las componentes armónicas están c/vez más cerca en $f$

$\Downarrow$

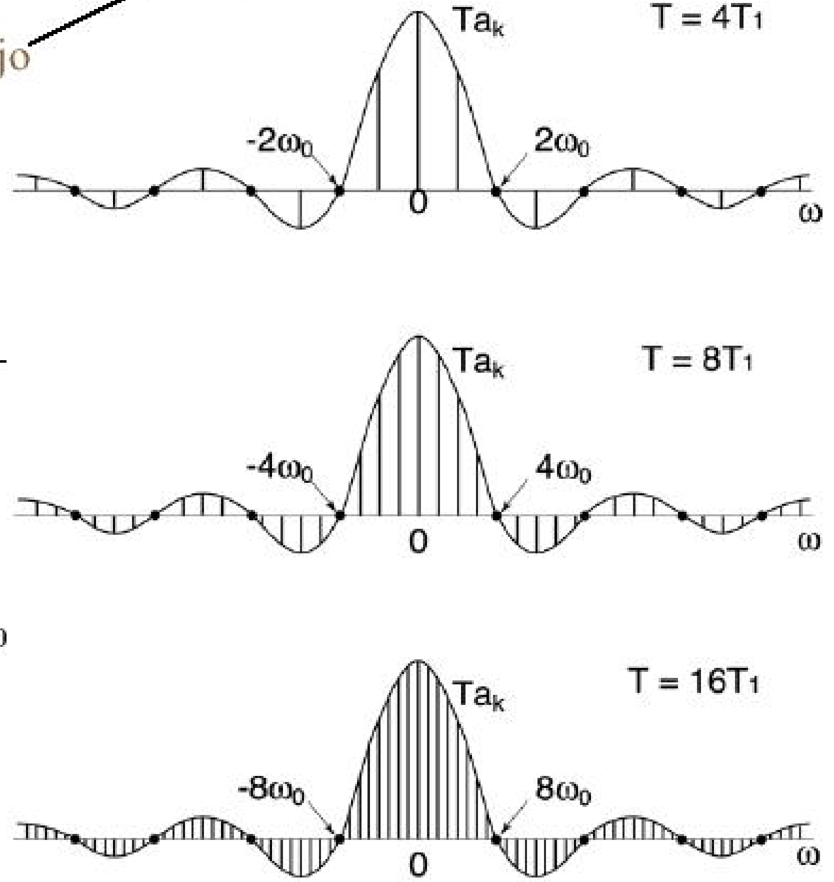
Serie de Fourier $\Longrightarrow$ Integral de Fourier




$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

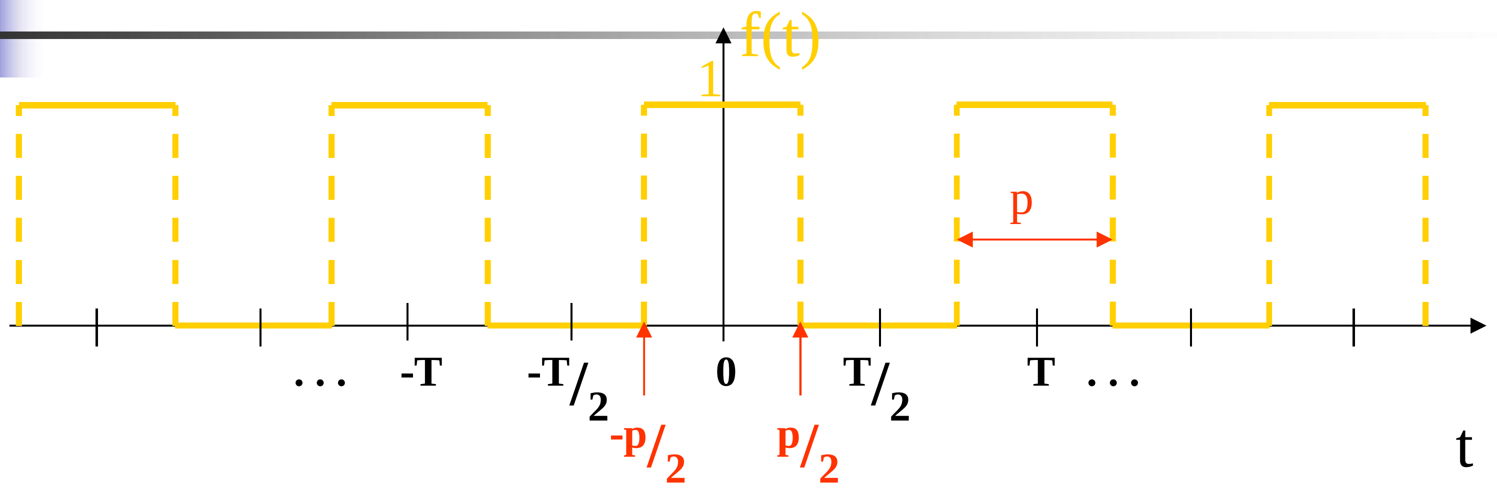
$$\Downarrow$$

$$Ta_k = \left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$




Los puntos de frecuencia discreta se vuelven más densos en $\omega$ a medida que aumenta $T$

Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T:



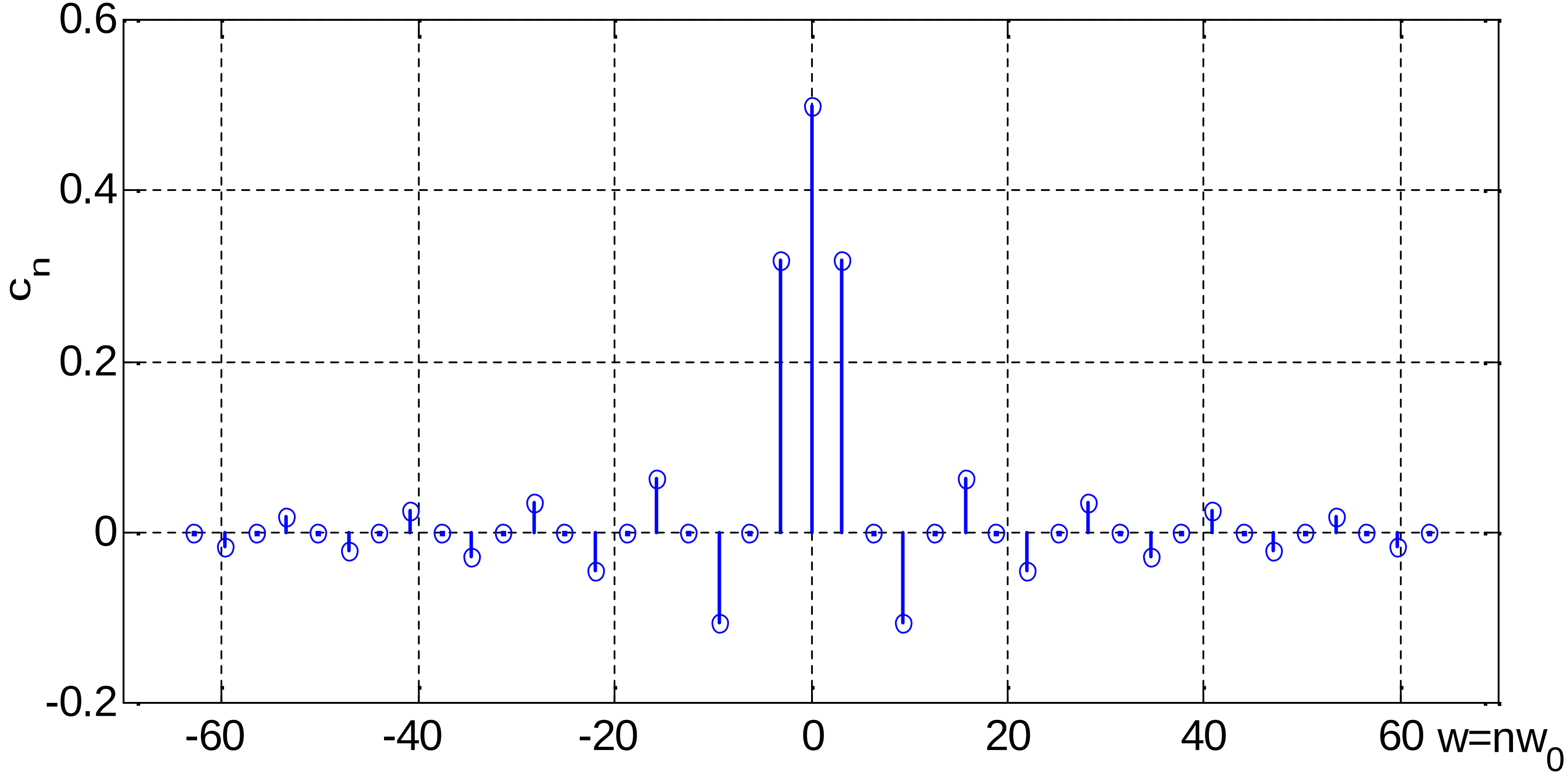

$$f(t)=\begin{cases}0 & \frac{-T}{2}<t<\frac{-p}{2}\\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2}\\ 0 & \frac{p}{2}<t<\frac{T}{2}\end{cases}$$

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

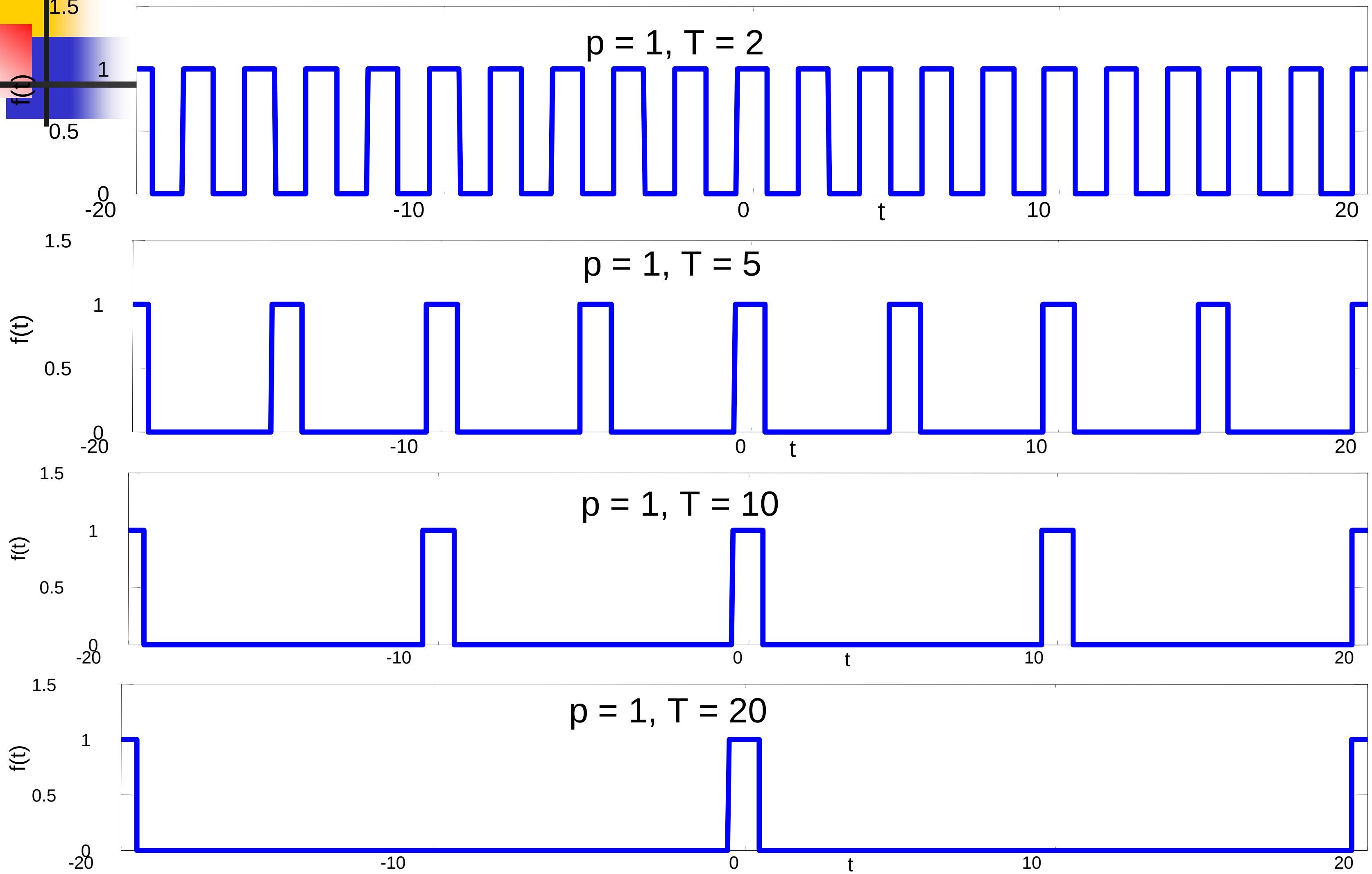
$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right)\frac{sen(n\mu_0 \frac{p}{2})}{(n\mu_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando $c_n$ contra $w = nw_0$.

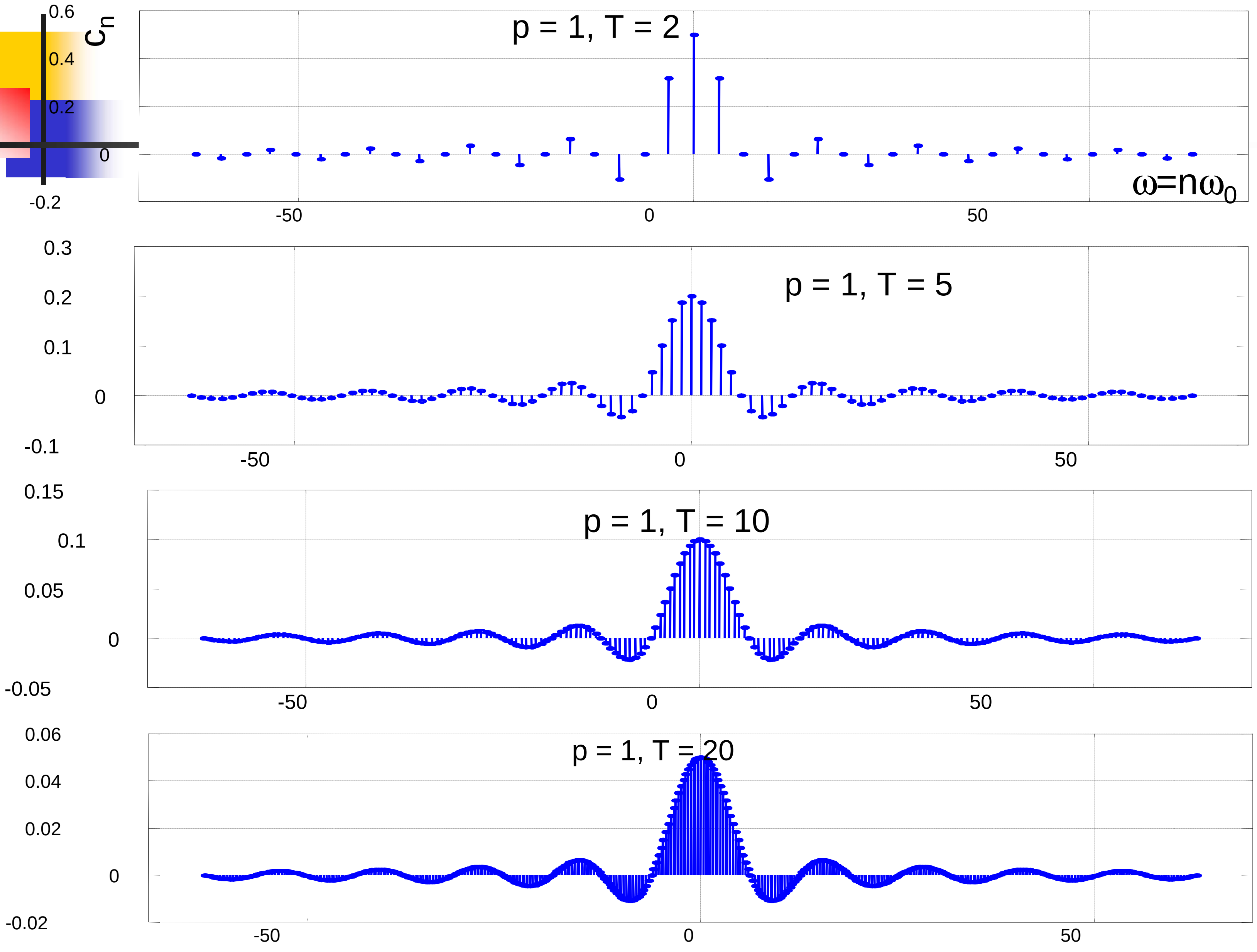
# Espectro del tren de pulsos para p = 1, T = 2



# Si el período del tren de pulsos aumenta...

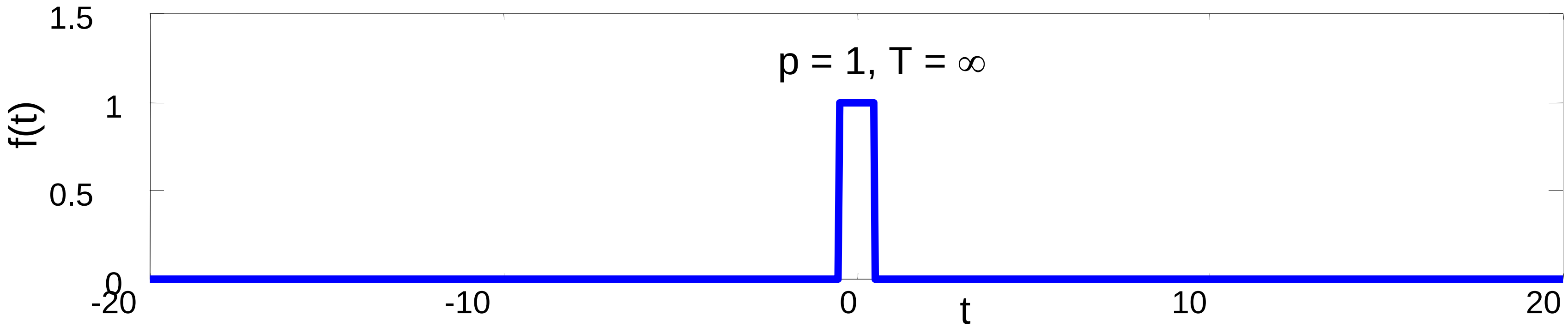


# ...el espectro se hace más "denso".



# Derivación

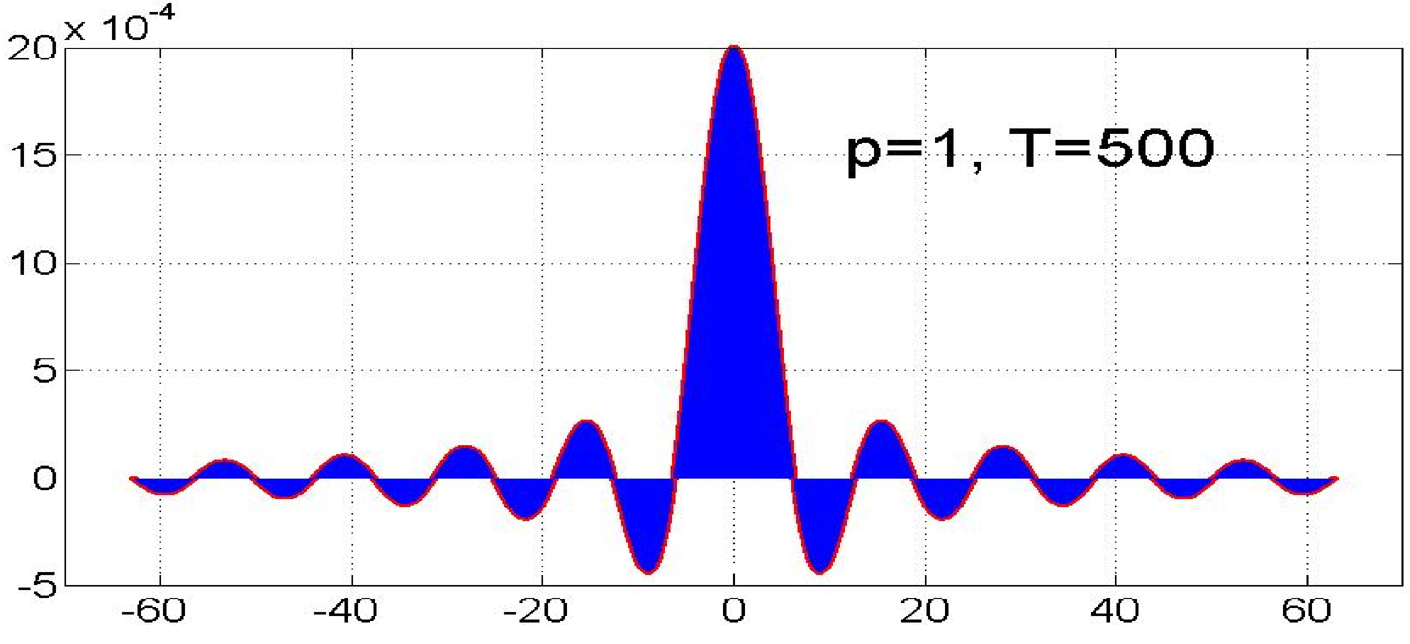
En el límite cuando $T \to \infty$, la función deja de ser periódica:




¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

# Derivación

Si se hace T muy grande ($T\rightarrow\infty$), el espectro se vuelve "continuo":



# Derivación

- La señal periódica $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk w_0 t}$ donde
- $$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)\, e^{-j w_0 k t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j w_0 k t}\, dt$$
- Si definimos $X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\, w_0)$$

# Derivación

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(jk\,w_0)\,e^{jk\,w_0 t}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}w_0\,X(jk\,w_0)\,e^{jk\,w_0 t}$$

Dado que $T \longrightarrow \infty$ entonces $\Sigma w_0 \longrightarrow \int dw$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(jw)\,e^{jwt}\,dw$$

Ecuación de síntesis

$$X(jw)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-jwt}dt$$

Ecuación de análisis

# Resumiendo

$$f(t) = \frac{1}{2\text{®}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j\mu t} d\mu$$

**Identidad de Fourier o antitrans-formada de Fourier**

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\mu t} dt$$

**Transformada de Fourier**

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión F(w) (dominio de la frecuencia) a partir de f(t) (dominio del tiempo) y viceversa.

# Par de TF

- ✓ Las ecuaciones anteriores son conocidas como el par de transformadas de Fourier. Las señales periódicas las expresamos como una suma de exponenciales complejas de amplitud $a_k$ y para un conjunto discreto de frecuencias relacionadas armónicamente. Para señales aperiódicas, las exponenciales complejas ocurren para una sucesión contínua de frecuencias y de “amplitud” $X(jw)dw/2$®

# Relación entre los coeficientes de la SF y la TF

- Supongamos que $\tilde{x}(t)$ es una señal periódica con período $T$ y coeficientes de Fourier $a_k$. $x(t)$ es una señal de duración finita que es igual a $\tilde{x}(t)$ en un período, entonces:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

- ya que x(t) es cero fuera del intervalo T

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt = \frac{1}{T} X(jw)\Big|_{w = k\,w_0}$$

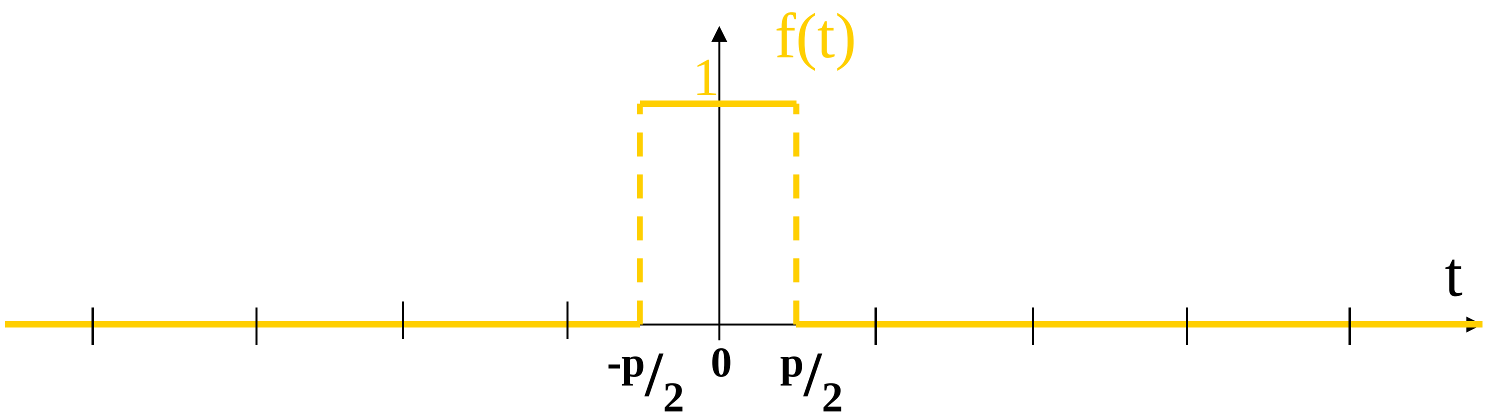
# Convergencia de la TF

- Nos referiremos también como condiciones de Dirichlet :
- x(t) sea absolutamente integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$$

- x(t) tenga un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito
- x(t) tenga un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito. Además cada discontinuidad debe ser finita.

Ejemplo. Calcular F(ω) para el pulso rectangular f(t) siguiente:




Solución. La expresión en el dominio del tiempo de la función es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

Integrando:

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\mu t} dt = \int_{-p/2}^{p/2} e^{-j\mu t} dt$$

$$= \frac{1}{-j\mu} e^{-j\mu t} \Big|_{-p/2}^{p/2} = \frac{1}{-j\mu} (e^{-j\mu p/2} - e^{j\mu p/2})$$

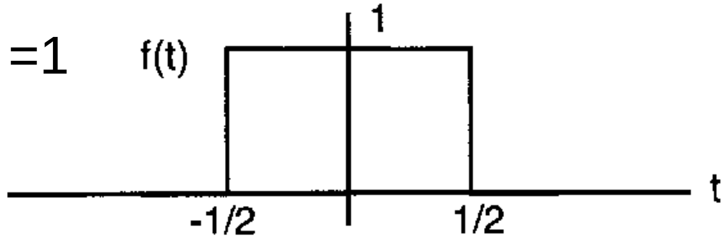
Usando la fórmula de Euler:

$$sen(\mu p/2) = \frac{e^{j\mu p/2} - e^{-j\mu p/2}}{2j}$$

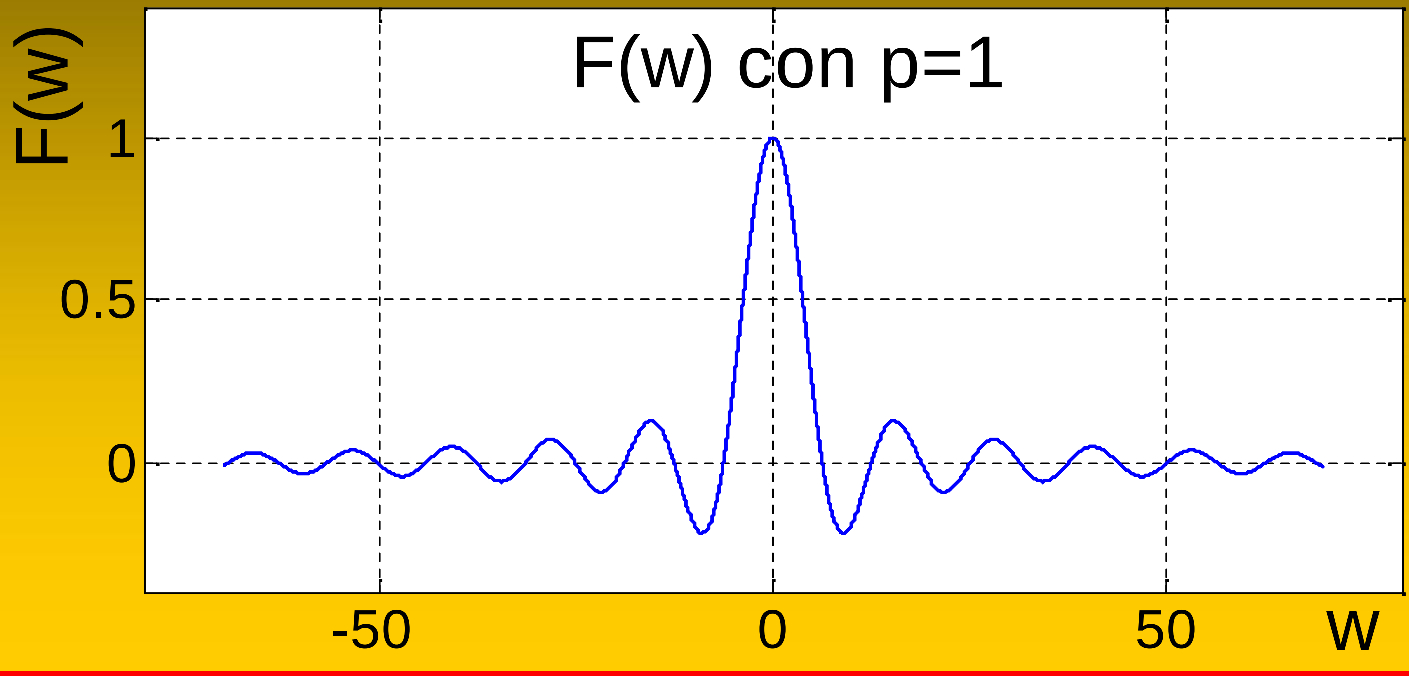
$$F(\mu) = p \frac{sen(\mu p/2)}{\mu p/2} = p\,\mathrm{sinc}(\mu p/2)$$

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{-p}{2}\\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2}\\ 0 & \frac{p}{2}<t\end{cases}$$

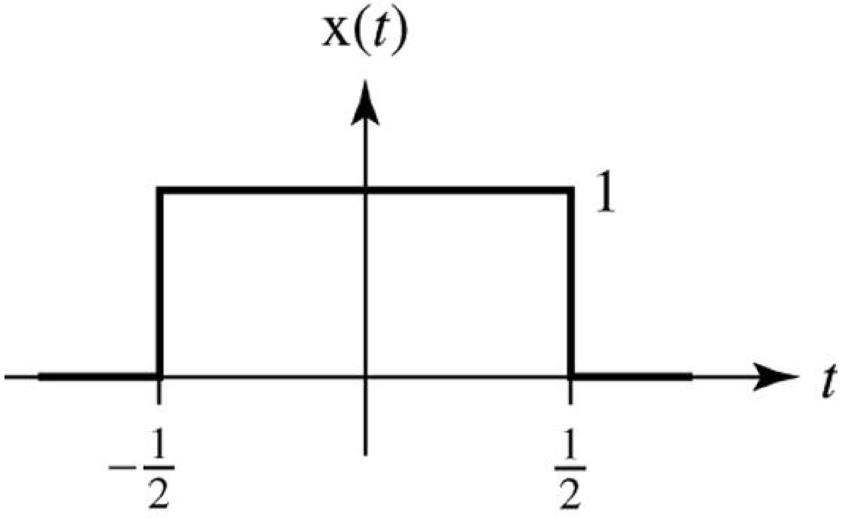
p =1

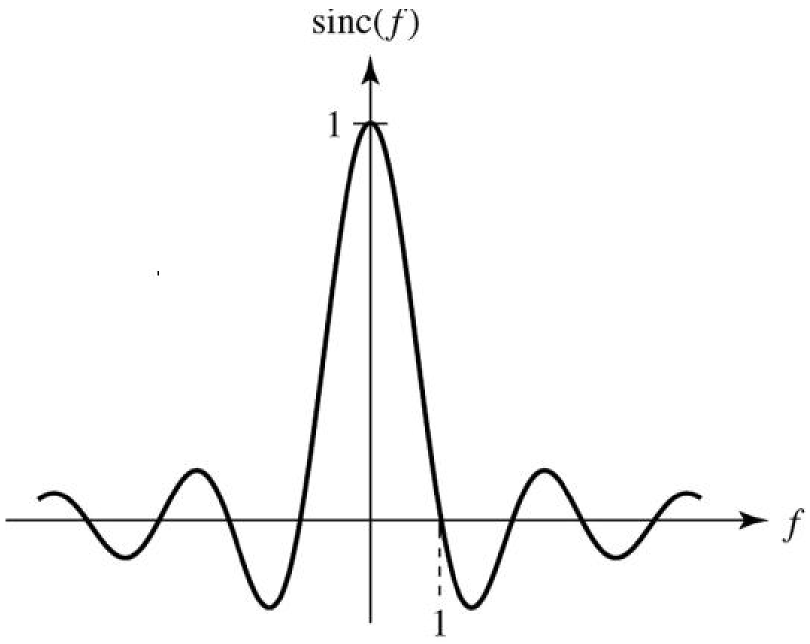



$$F(\mu)=p\,\mathrm{sinc}(\mu p/2)$$



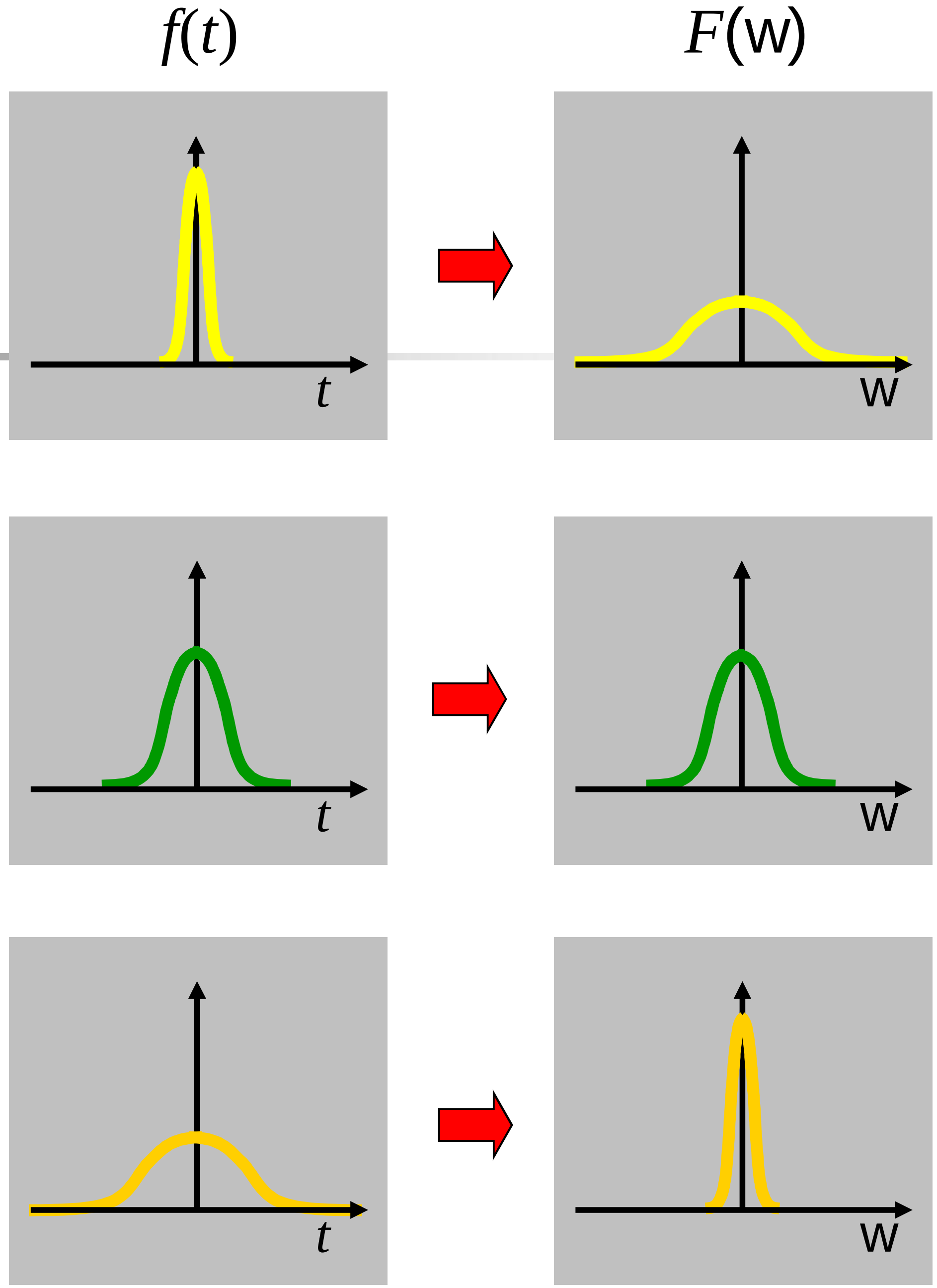
# Ejemplo



Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.

Esta es la esencia del principio de incertidumbre en mecánica cuántica.



# Linealidad

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(w)$

  y

- $y(t) \longleftrightarrow Y(w)$

  entonces

- $ax(t)+by(t) \longleftrightarrow aX(w)+bY(w)$

# Desplazamiento de tiempo

- Si $\quad x(t) \longleftrightarrow X(w)$

  entonces

- $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jwto}\, X(w)$

# Diferenciación e integración

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow jwX(w)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) \leftrightarrow \frac{1}{jw} X(w) + \pi X(0)\delta(w)$$

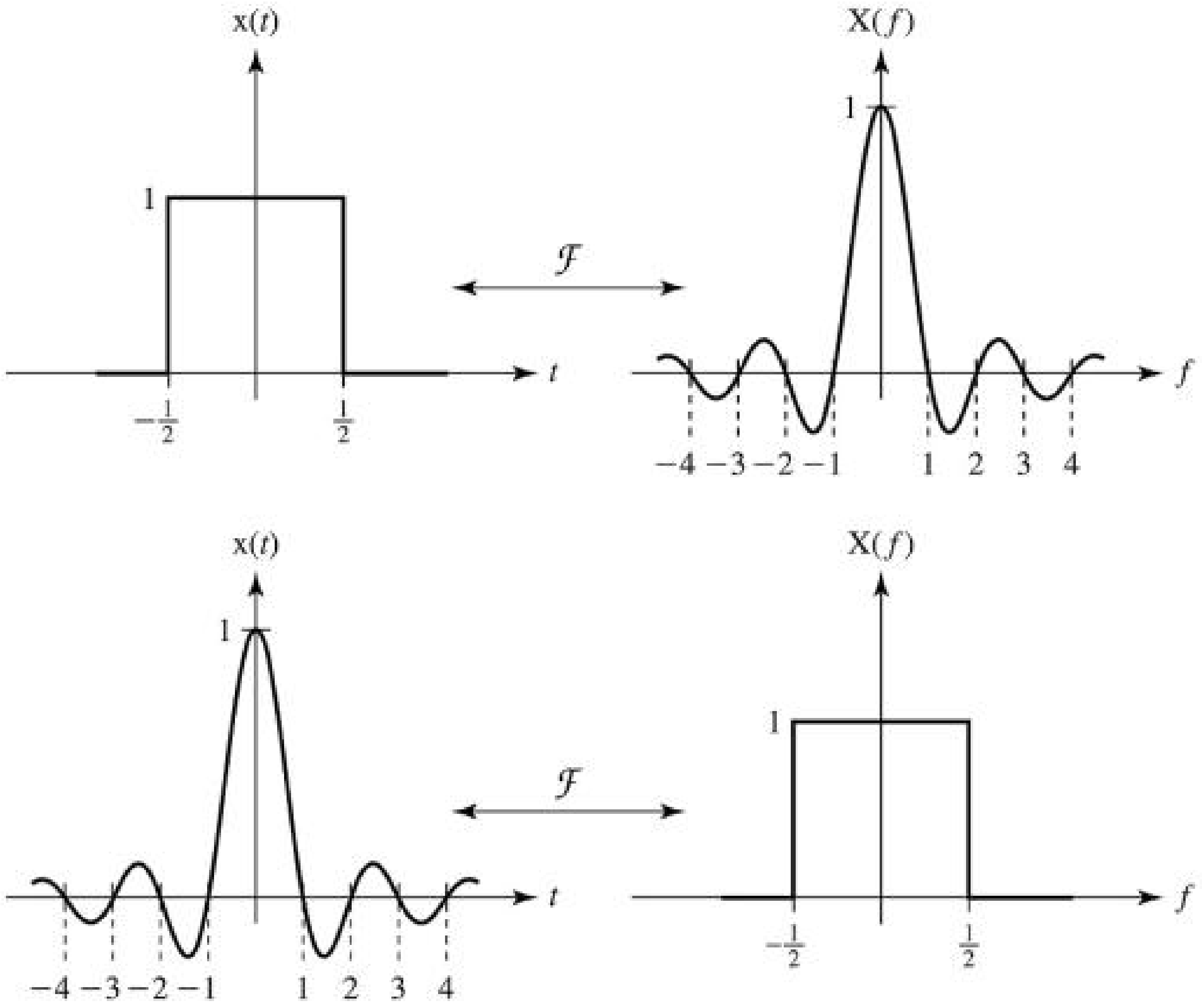
# Escalamiento de tiempo y frecuencia

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(w)$

  entonces

- $x(at) \longleftrightarrow 1/|a|.\ X(w/a)$

# Dualidad



# Relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\text{®}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(w) \right|^2 dw$$

La energía total se puede calcular ya sea mediante el cálculo de la energía por unidad de tiempo integrando para todo tiempo, ó calculando la energía por unidad de frecuencia e integrando para todas las frecuencias.

# Convolución

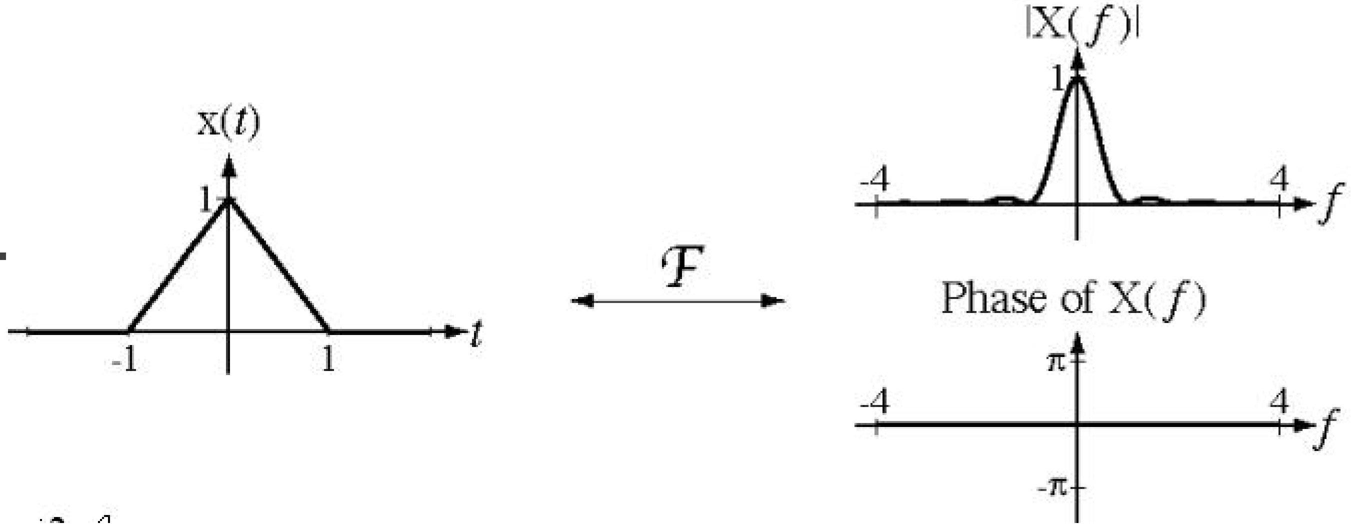
- Si $x(t) \longleftrightarrow X(w)$

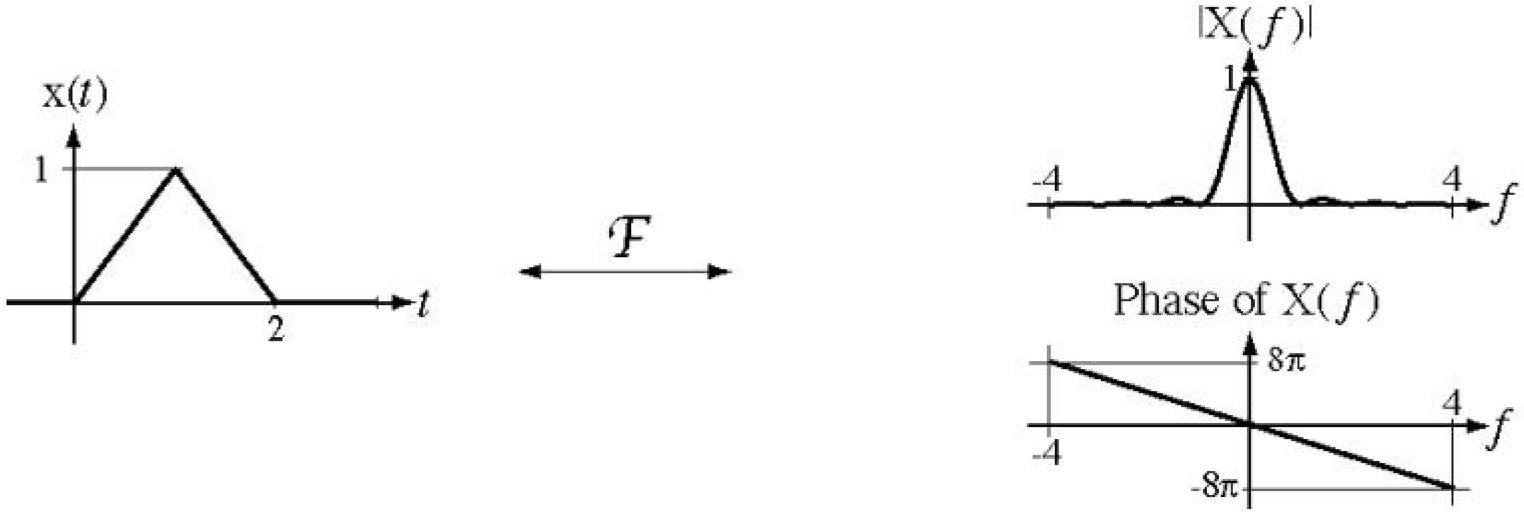
  y

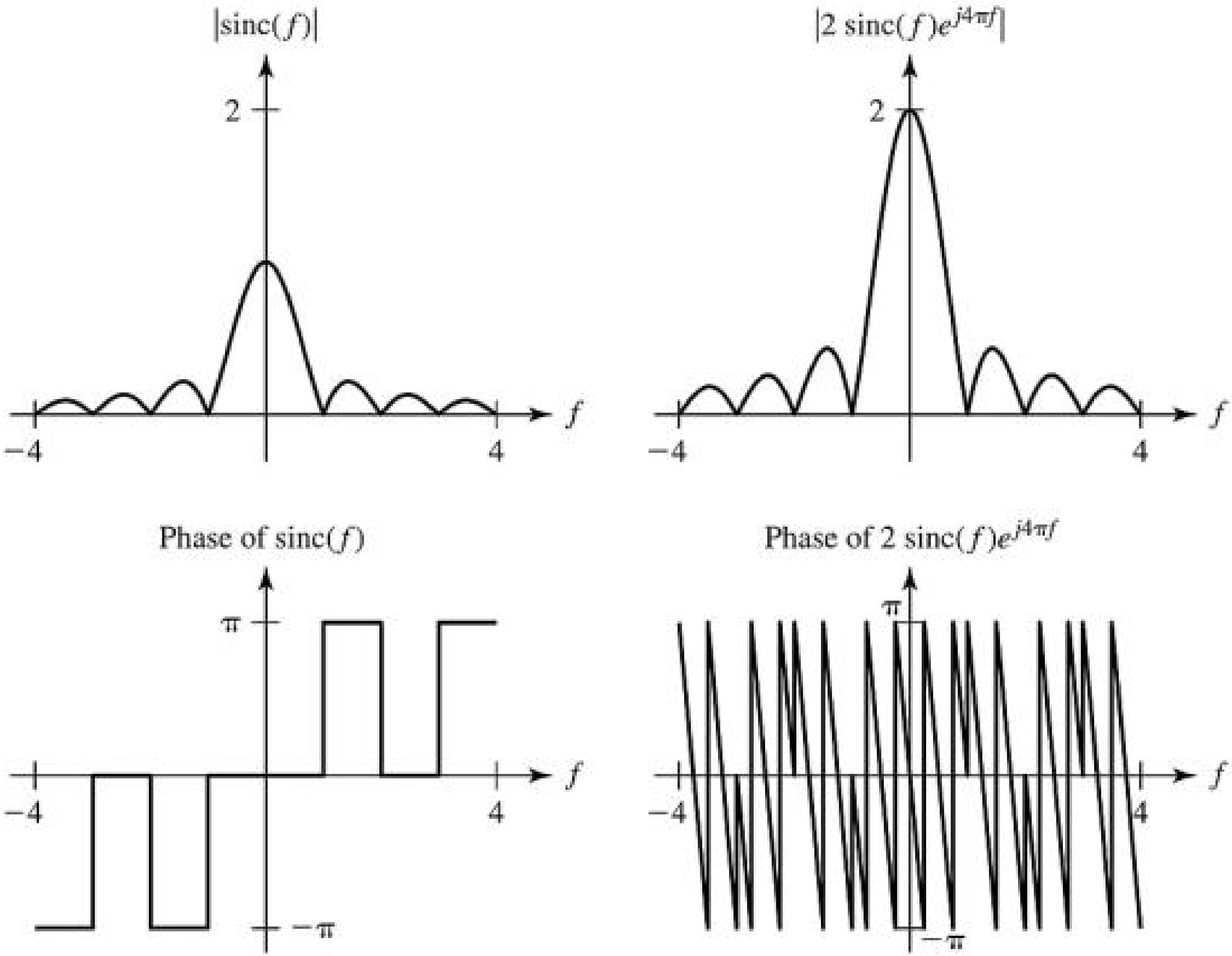
- $h(t) \longleftrightarrow H(w)$

entonces:

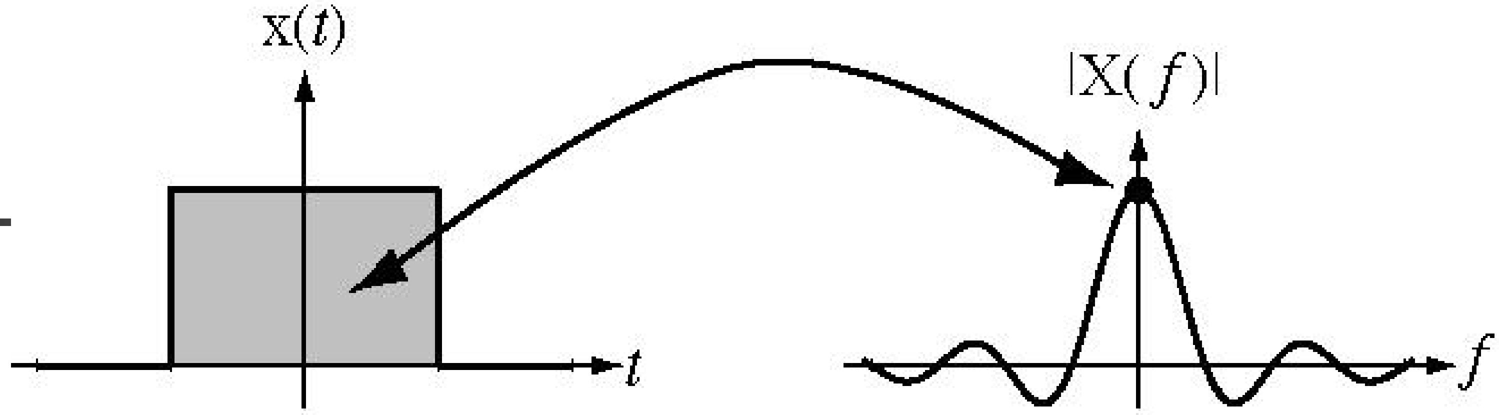
$$y(t)=x(t)*h(t) \longleftrightarrow Y(w)=X(w).H(w)$$

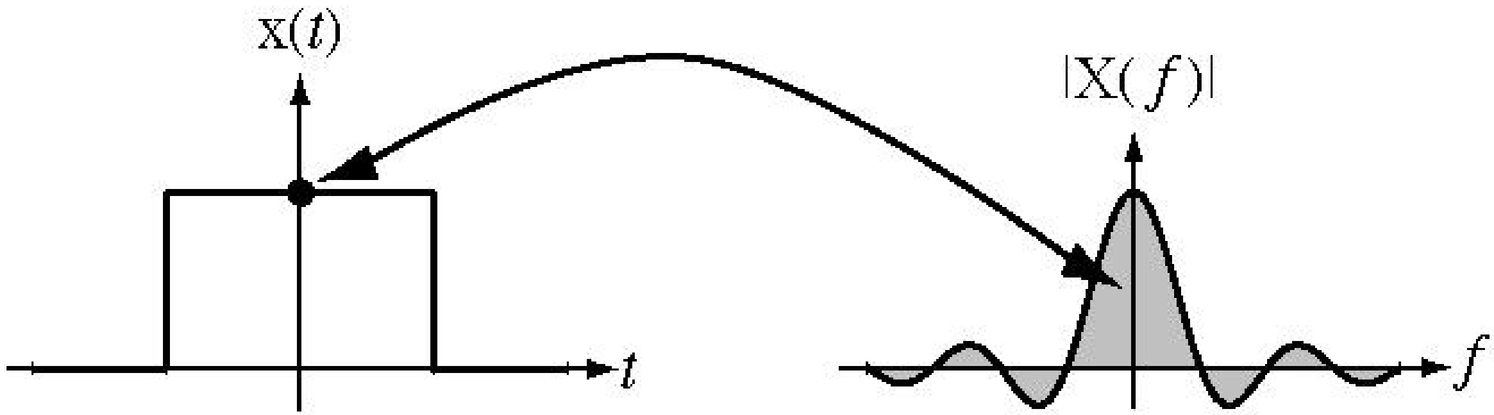

x(t)
1
-1
1
t
F
|X( f )|
1
-4
4
f
Phase of X( f )
π
-4
4
f
-π


x(t)
1
2
t
F
|X( f )|
1
-4
4
f
Phase of X( f )
8π
4
f
-4
-8π

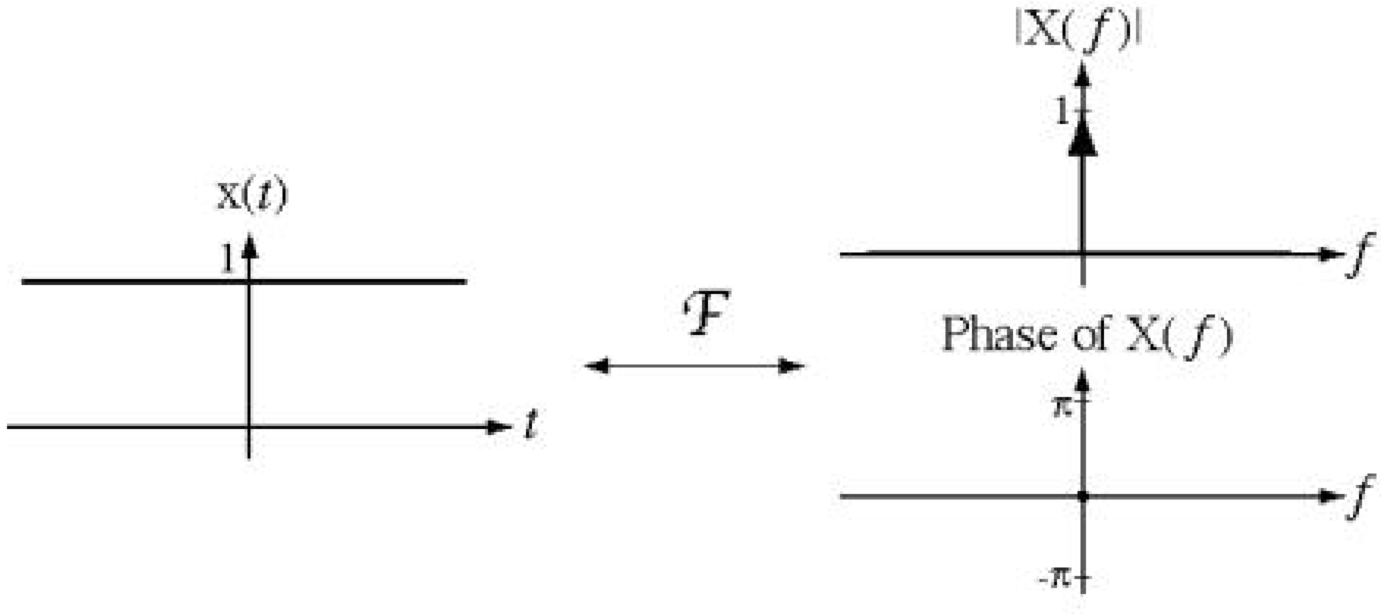


|sinc(f)|
2
−4
4
f
|2 sinc(f)e^{j4πf}|
2
−4
4
f
Phase of sinc(f)
π
−π
−4
4
f
Phase of 2 sinc(f)e^{j4πf}
π
−π
−4
4
f

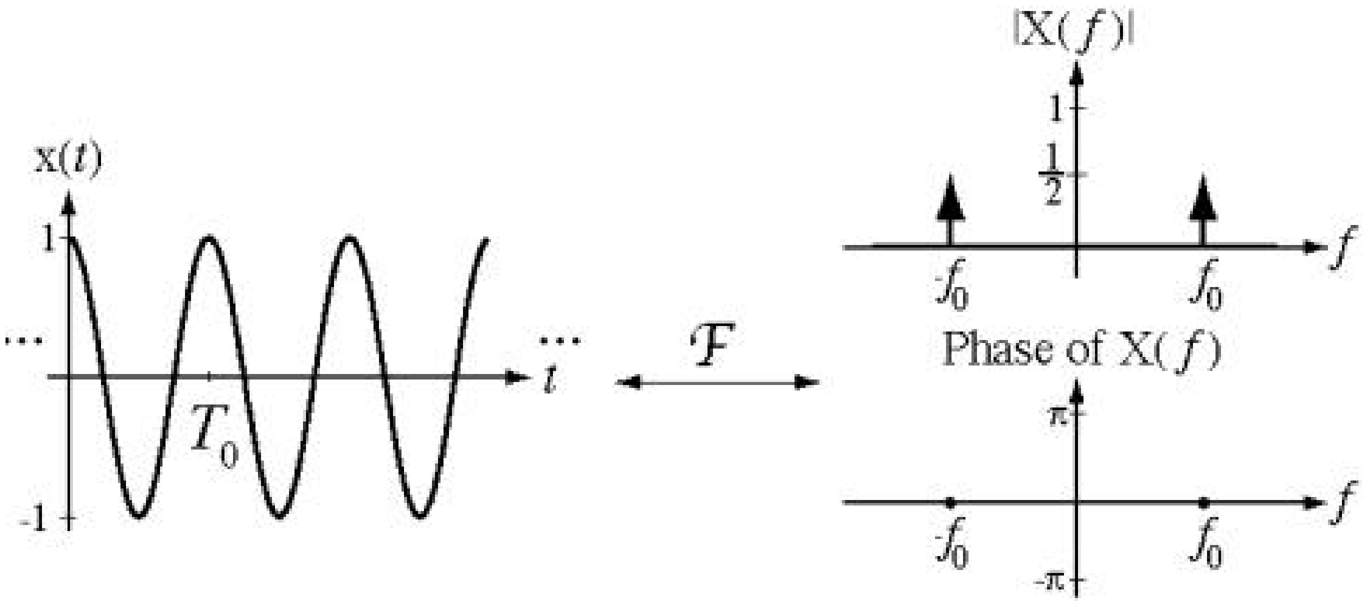

x(t)
t
|X( f )|
f


x(t)
t
|X( f )|
f

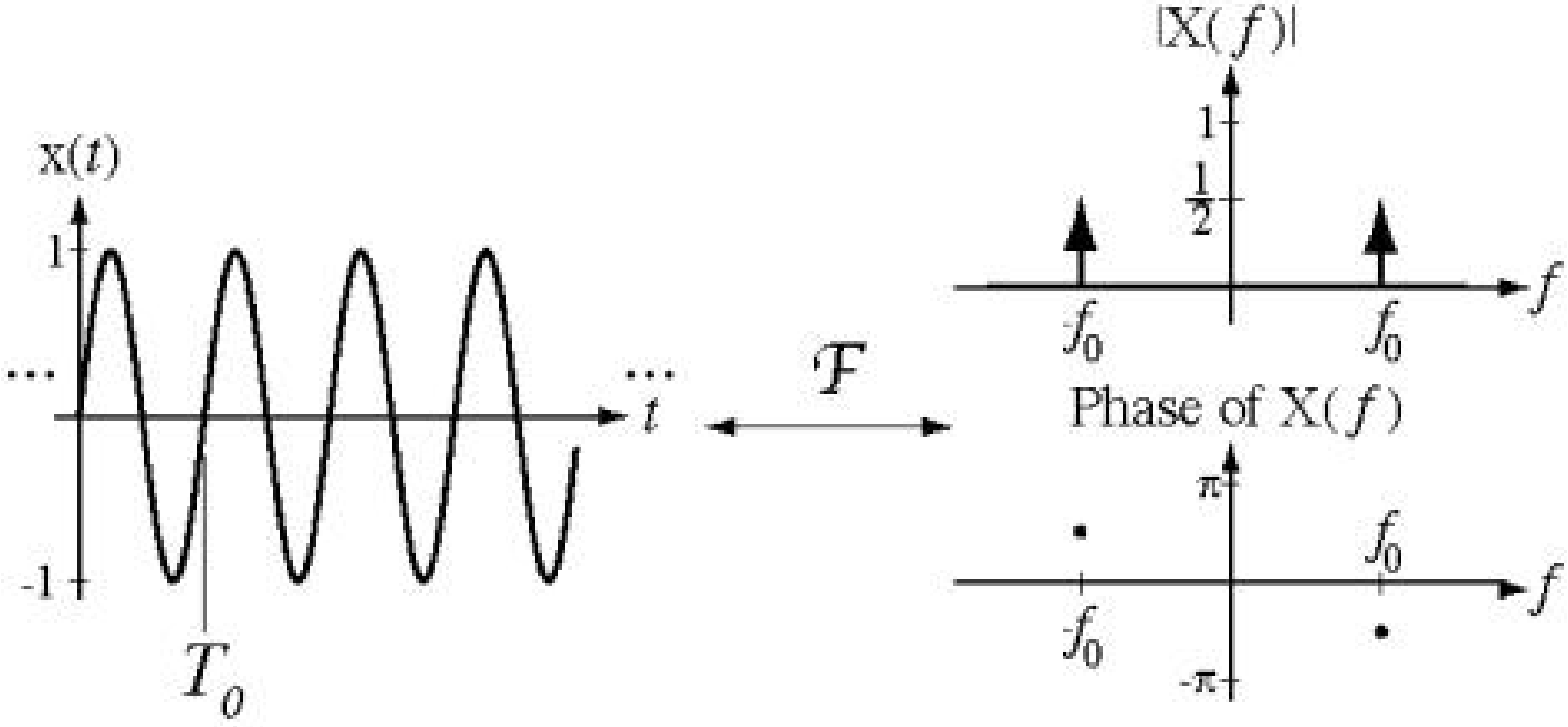
# $1 \longleftrightarrow \delta(f)$



# $\cos 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$



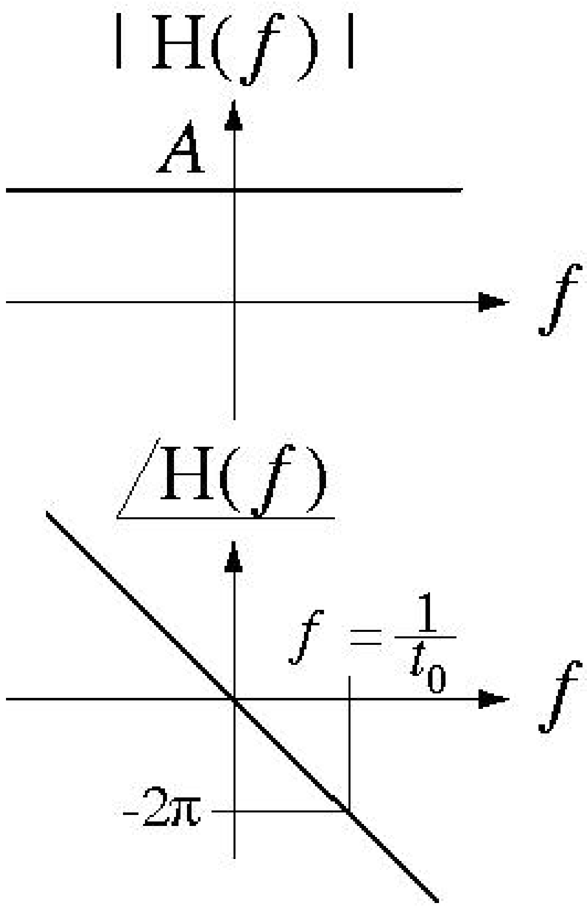
# $\text{sen } 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}j[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$



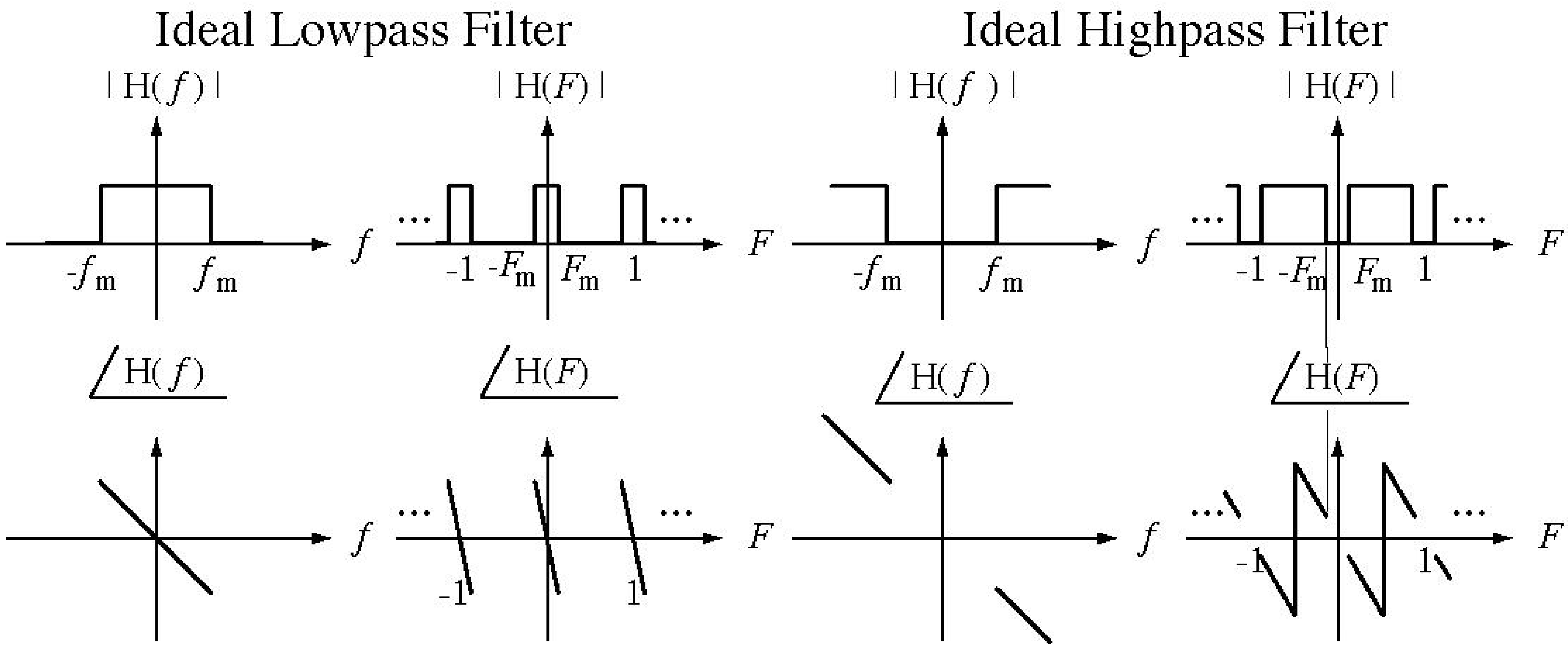
# Filtros ideales en TC

- Filtro: separa lo deseado de lo que no es deseado.
- En señales un filtro separa señales en un rango de f, de señales en otro rango de f.
- Un filtro ideal “pasa” toda la señal en su banda de paso sin distorsión y bloquea la señal fuera de su banda.

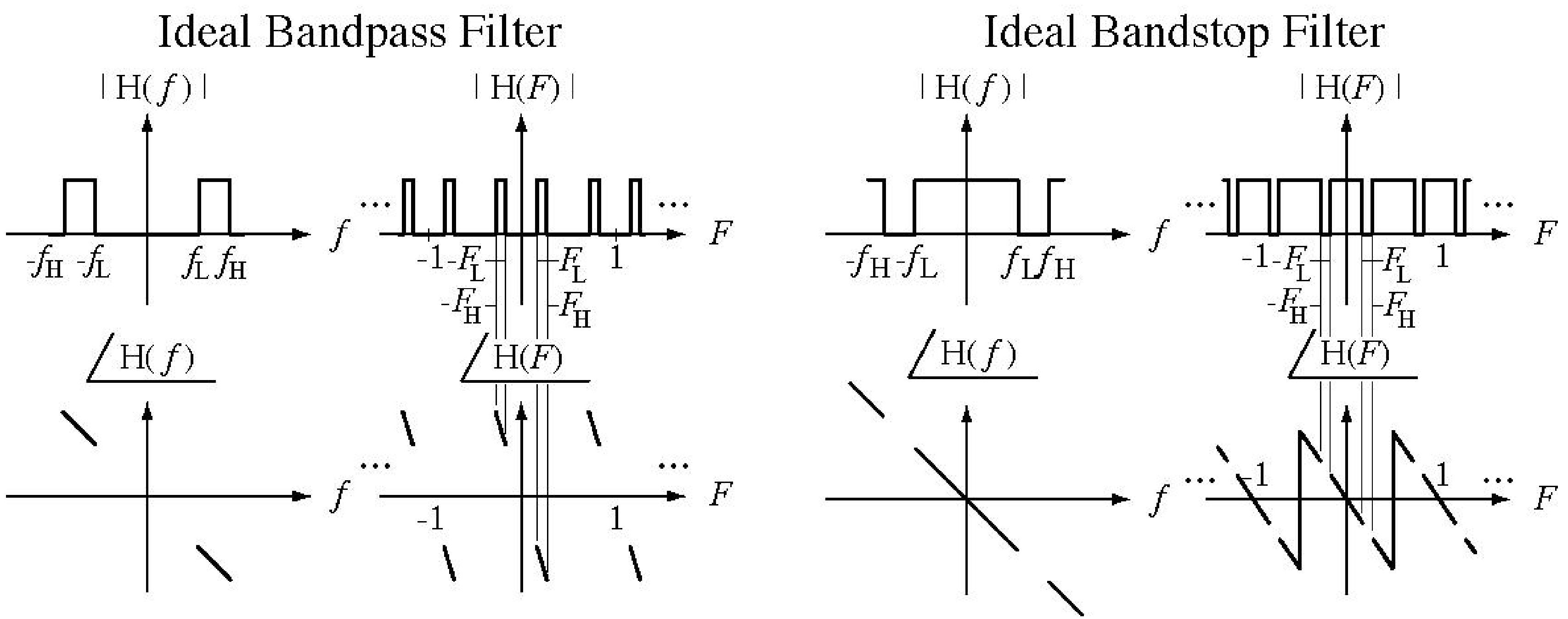
# Filtro ideal



# Pasa bajos ideal – Pasa altos ideal



# Pasa banda ideal – Rechazo de banda ideal

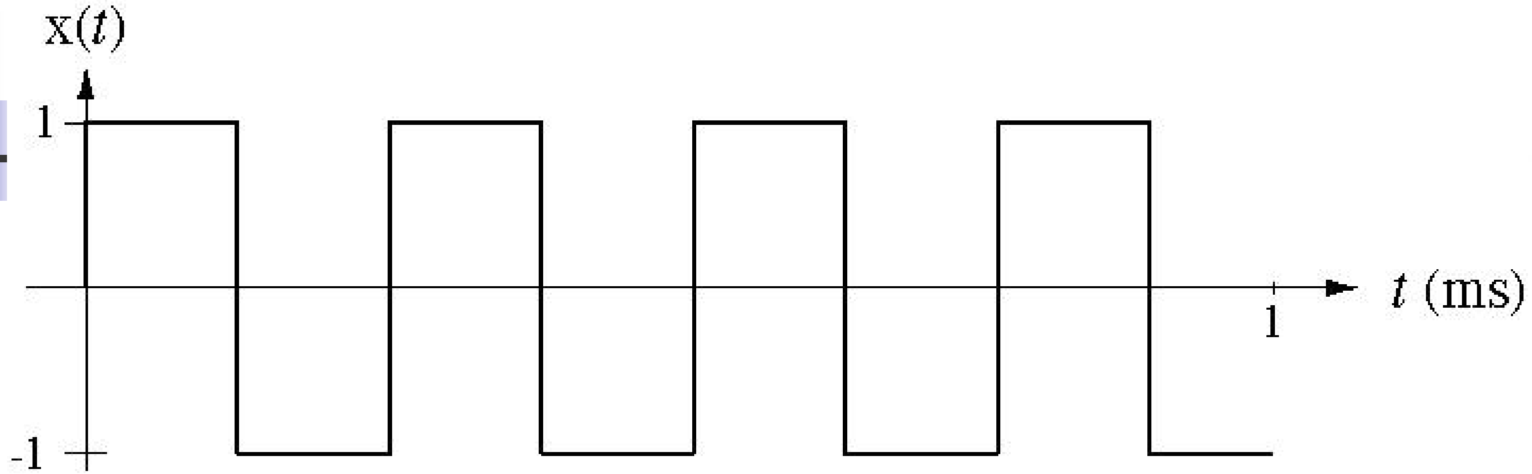


# Ancho de banda

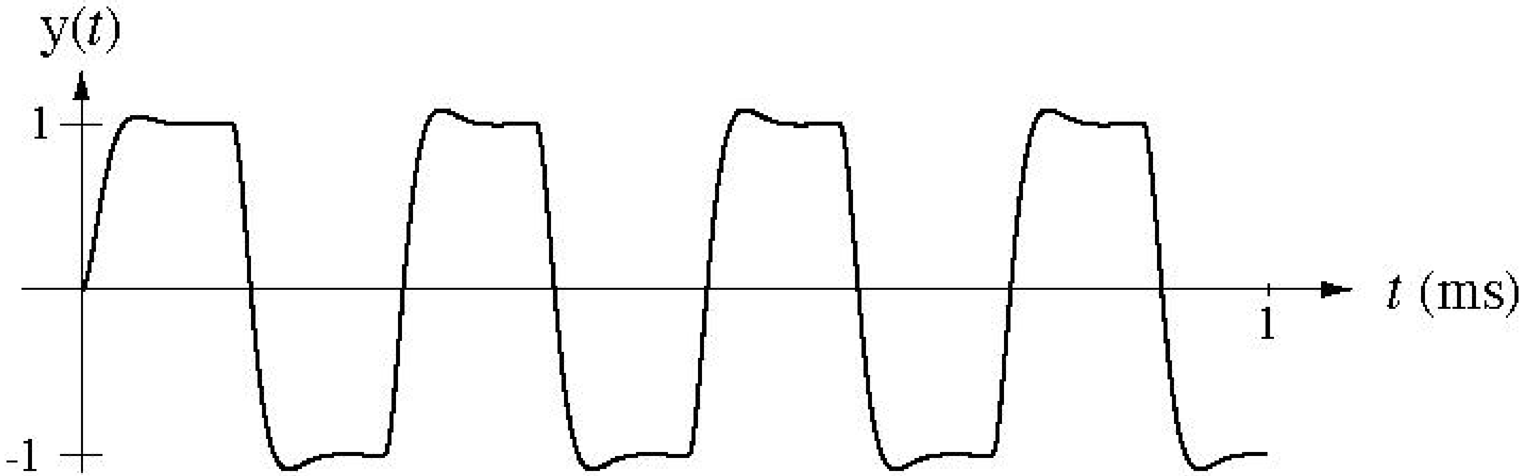
- Rango de f.

- Rango de frecuencias que deja pasar el filtro ó rango de frecuencias presentes en la señal.

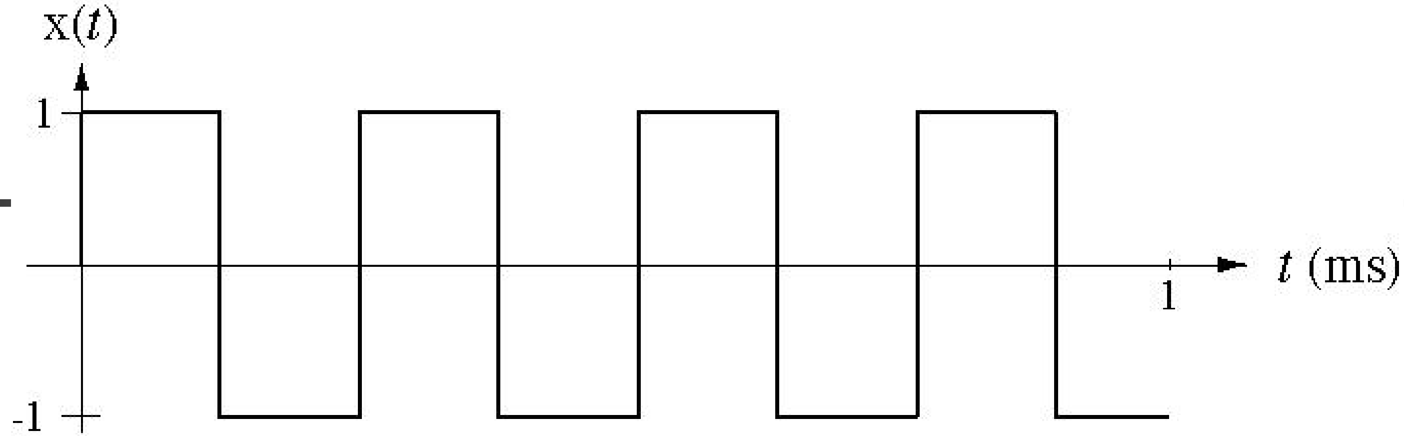
# Excitation of a Causal Lowpass Filter




# Response of a Causal Lowpass Filter



## Excitation of a Causal Highpass Filter




## Response of a Causal Highpass Filter