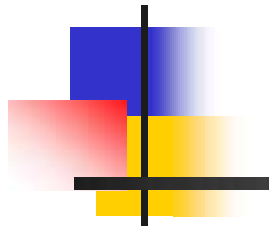


Análisis de Señales

Curso 2017



Descripción matemática de
señales



Señales

- Las señales son funciones de variables independientes, portadoras de información
- Señales eléctricas: tensiones y corrientes en un circuito
- Señales acústicas: audio
- Señales de video: variación de la intensidad
- Señales biológicas: secuencias de bases de un gen

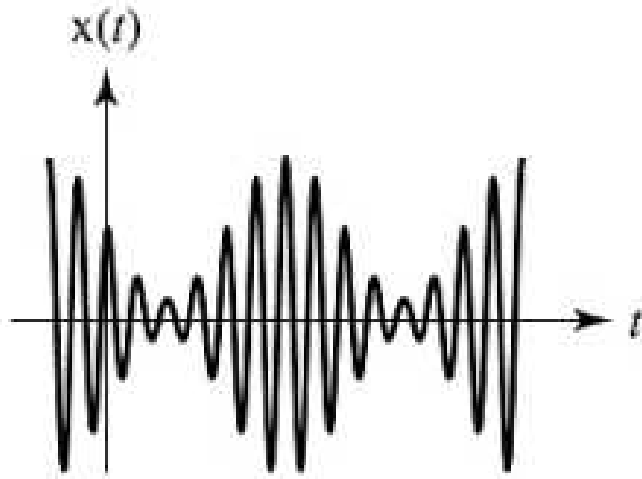


Variables independientes

- Pueden ser continuas
- Pueden ser discretas
- Pueden ser 1-D, 2-D.....N-D
- Para este curso: tiempo. Var. Indep.1-D
- tiempo continuo (TC) $x(t)$ \Rightarrow t toma valores continuos
- tiempo discreto (TD) $x[n]$ \Rightarrow n toma valores enteros



Señales en TC :analógicas

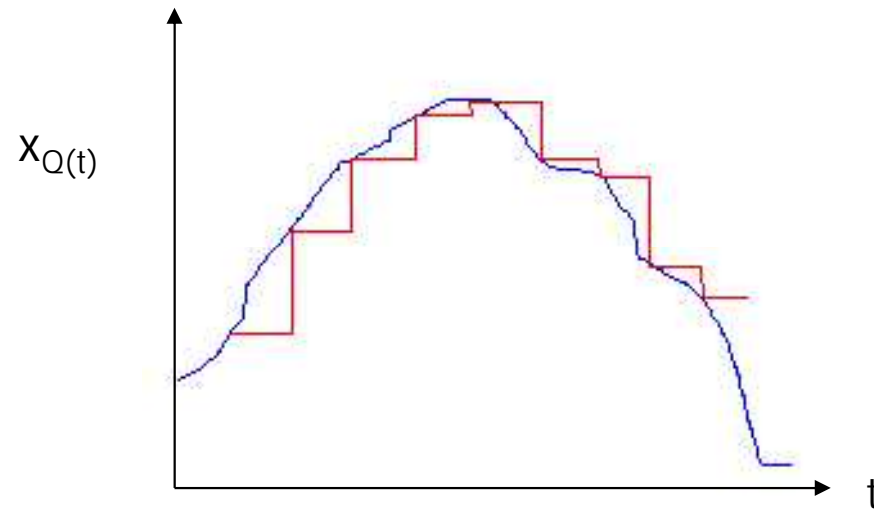


Amplitud y tiempo
continuos - $x(t)$

t valores contínuos

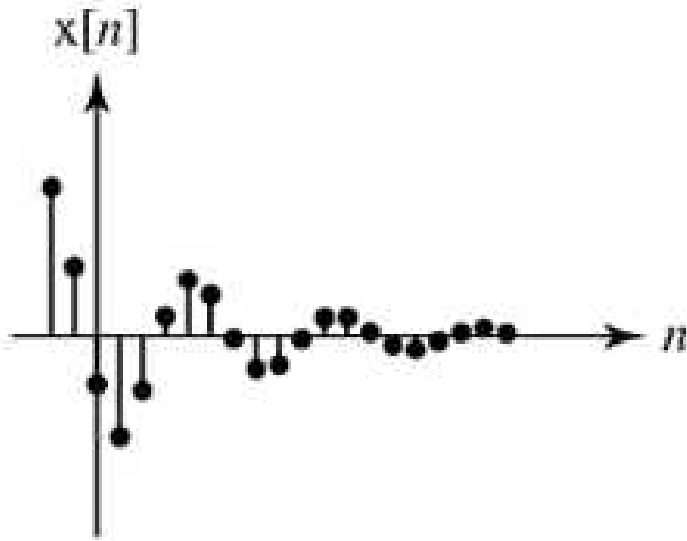
La mayoría de las señales del mundo físico son del tipo TC. Por ej. tensión, corriente, presión, temperatura y velocidad

Señales cuantizadas



Tiempo continuo, amplitud discreta. La amplitud solo toma determinados valores.

Señales en TD : muestreadas



Muestreadas: tiempo discreto
amplitud continua - $x[n]$

n \rightarrow valores enteros

Señales en TD en la naturaleza

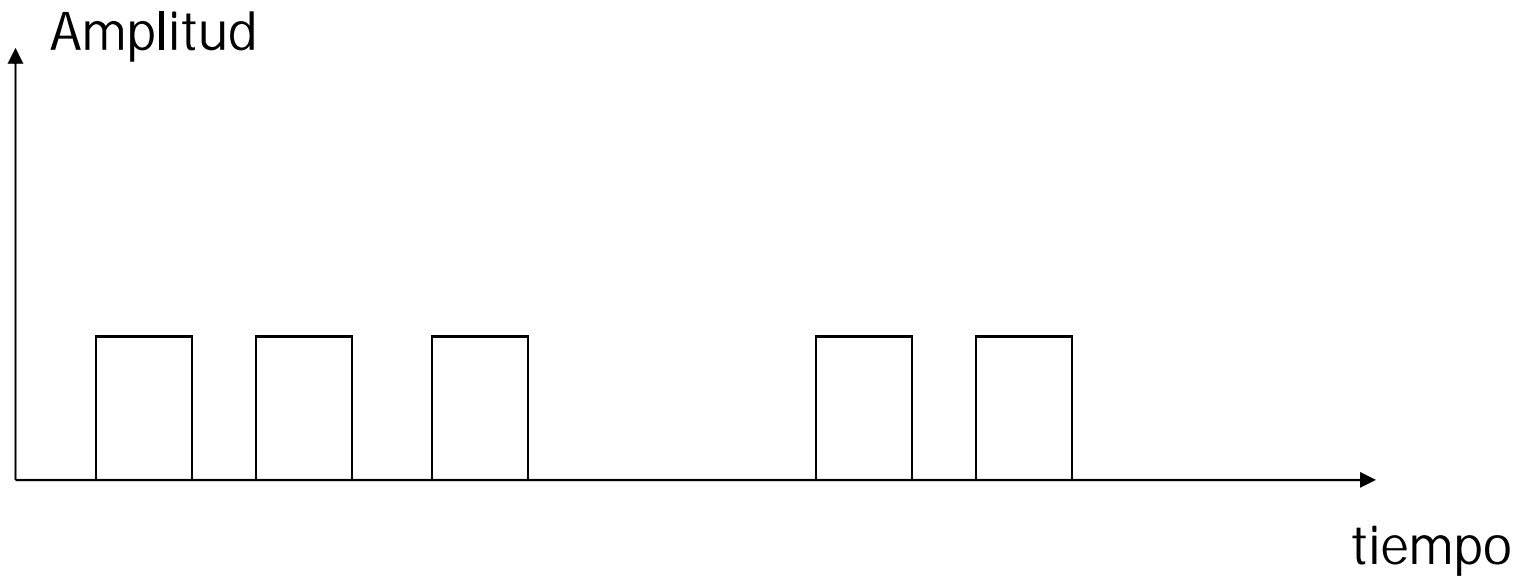
- Secuencia de bases ADN
- Población de especies

En TD hechas por el hombre

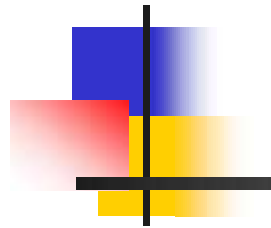
- Imagen digital
- Interés bancario



Digitales



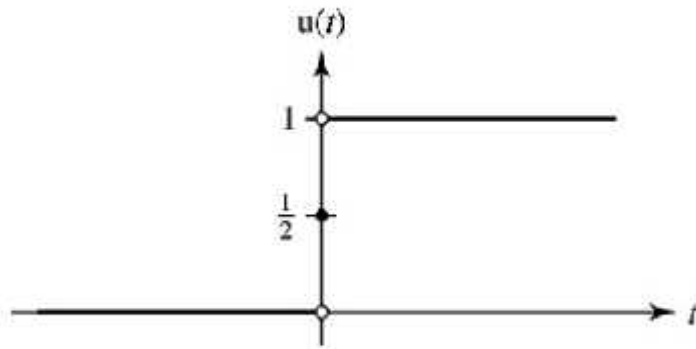
Discreta en amplitud y en tiempo



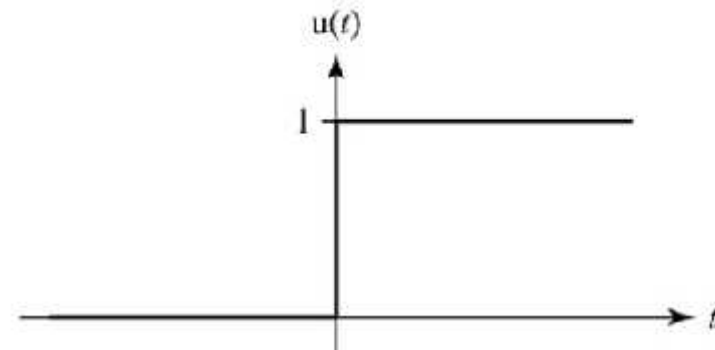
FUNCIONES DE SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO



Función escalón

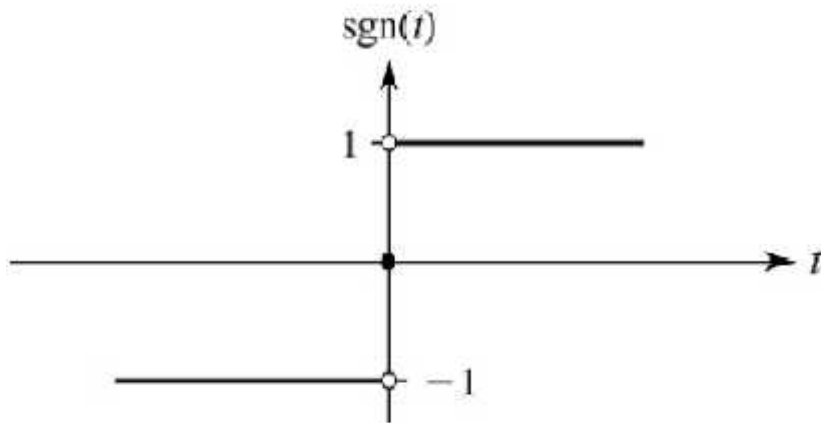


$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

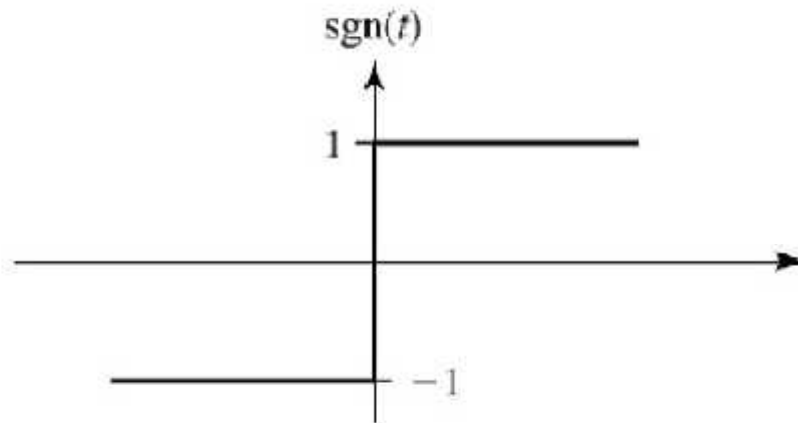


$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Función signo

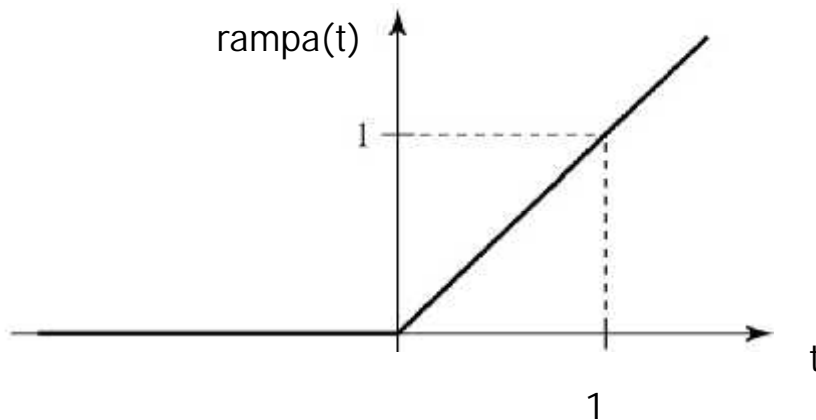


$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

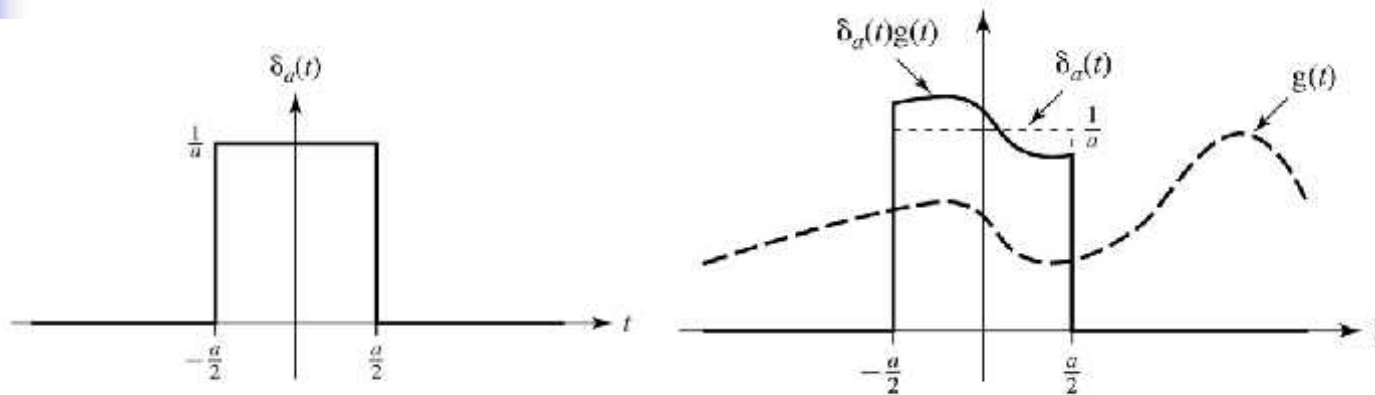
Función rampa unitaria



La función rampa en TC es la integral de la función escalón unitario

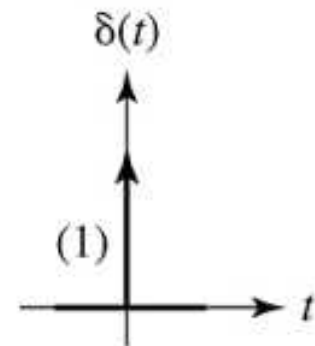
$$rampa(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t u(\ddagger) d\ddagger = tu(t)$$

Función impulso unitario



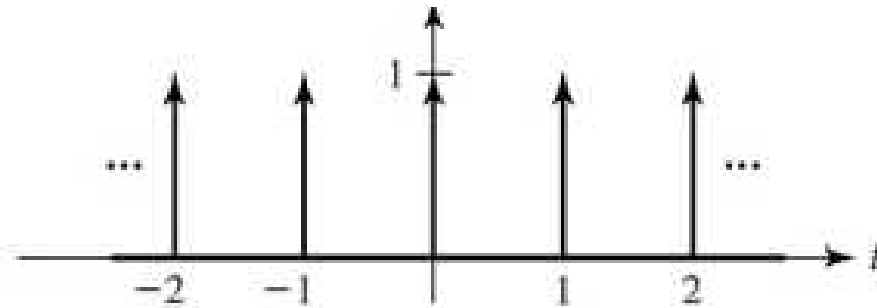
$$A = \int_{-\infty}^{\infty} u_a(t) g(t) dt = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} g(t) dt$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} A = g(0) \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dt = g(0) \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \cdot a = g(0)$$



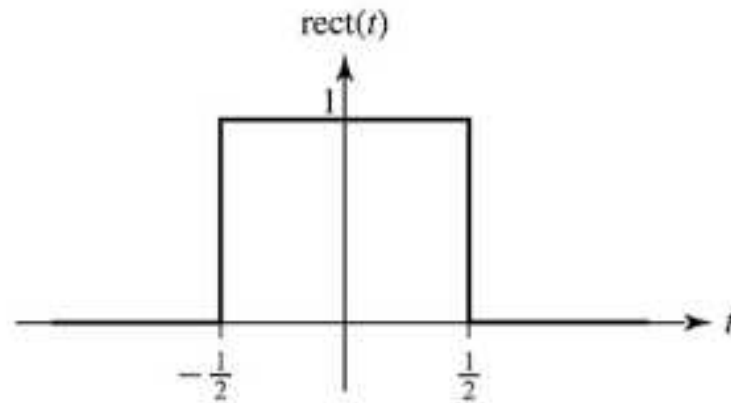


Tren de impulsos unitarios



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t - n.1)$$

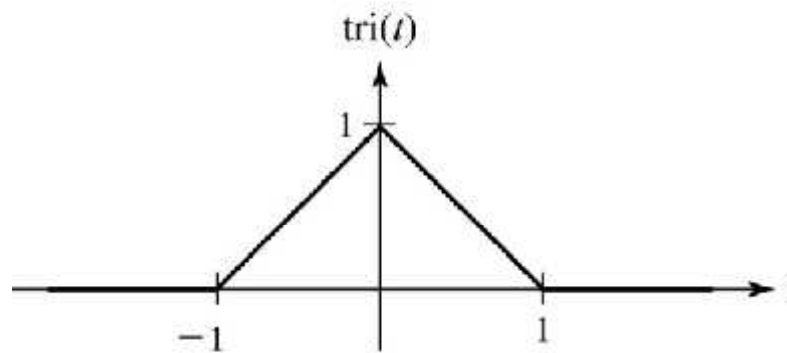
Función rectángulo unitario



$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$



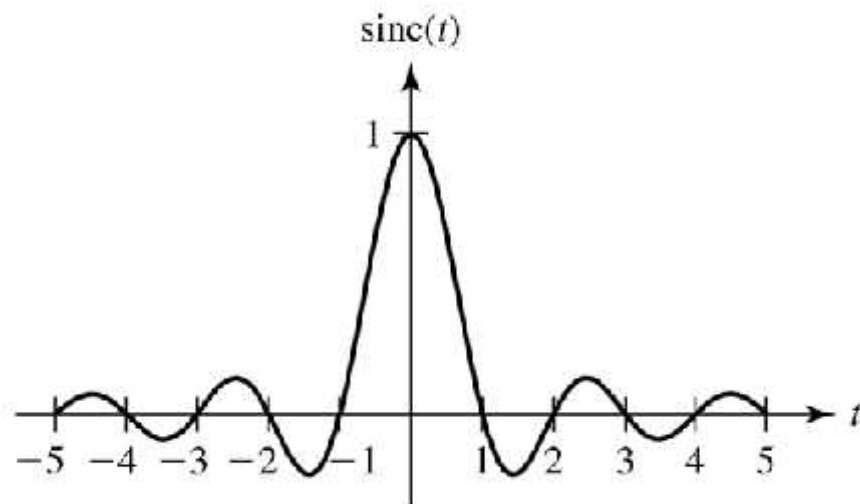
Función triángulo unitario



$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$



Función sinc unitaria



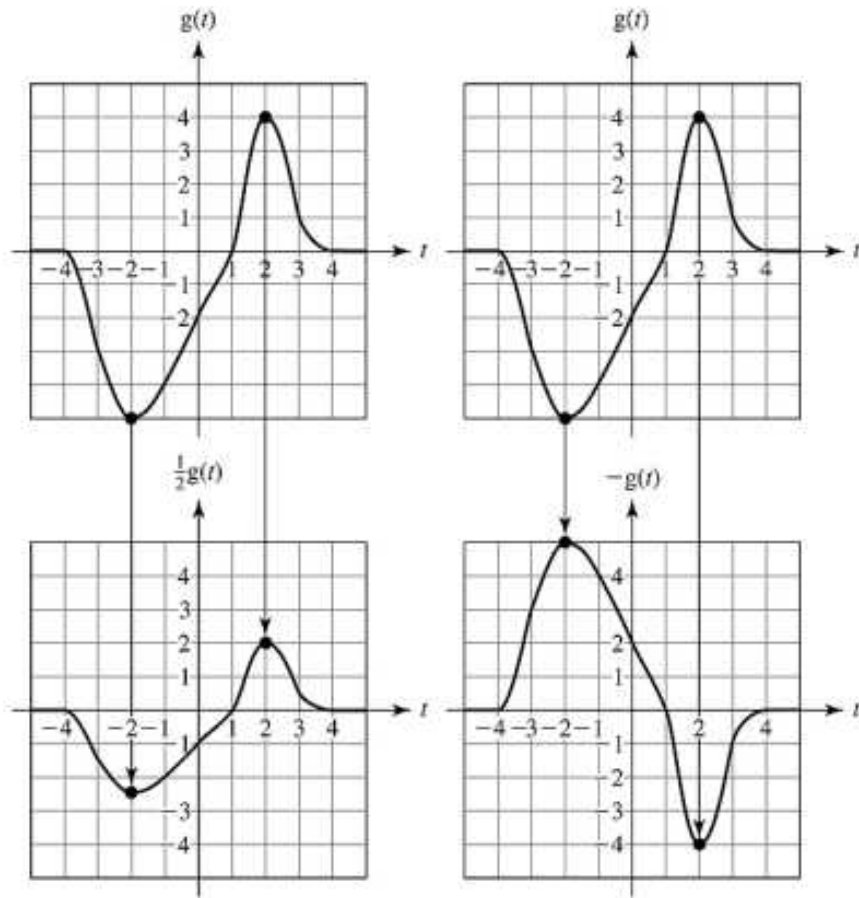
$$\text{sinc}(t) = \frac{\text{sen}(f t)}{f t}$$



Transformaciones de la variable independiente

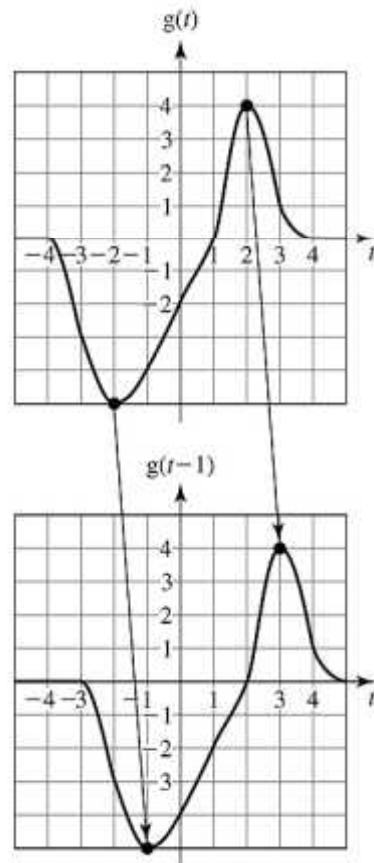
- Escalamiento de amplitud
- Desplazamiento en el tiempo
- Escalamiento en el tiempo
- Transformaciones múltiples

Escalamiento en amplitud



$$g(t) \longrightarrow Ag(t)$$

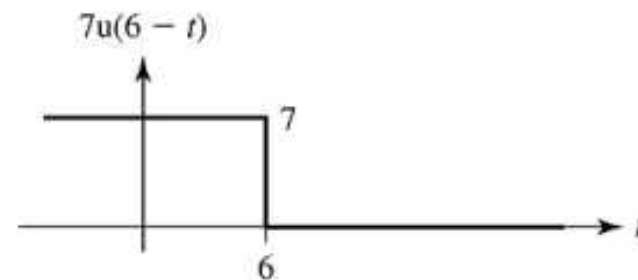
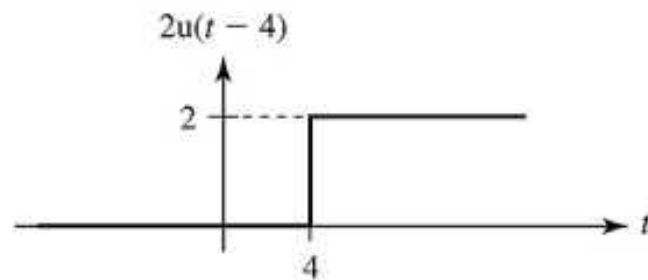
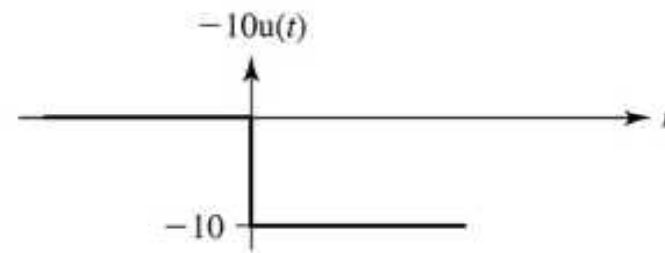
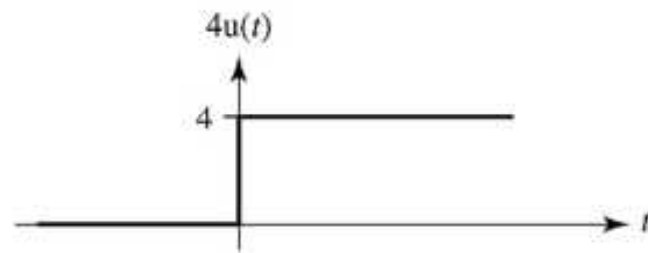
Desplazamiento en el tiempo



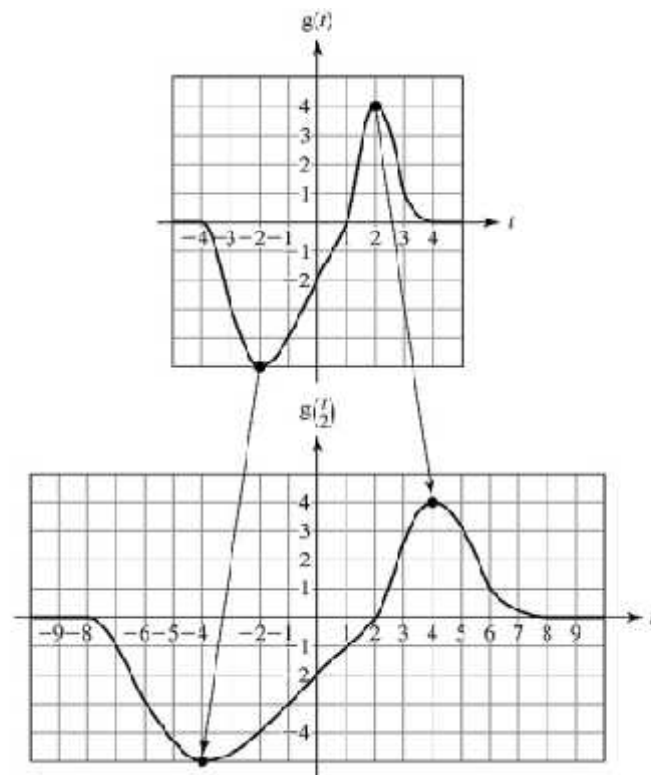
$$t \longrightarrow t-1$$

t	t-1	g(t-1)
-3	-4	0
-2	-3	-3
-1	-2	-5
0	-1	-4
1	0	-2
2	1	0
3	2	4

Ej. Funciones escalón transformadas



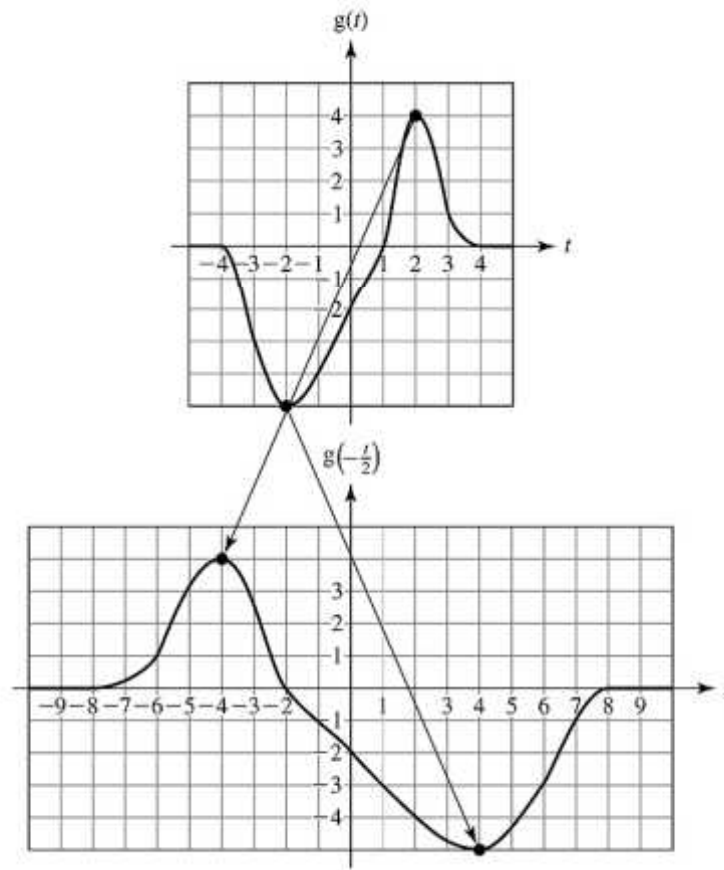
Escalamiento en el tiempo



$$t \longrightarrow t/a$$

t	$t/2$	$g(t/2)$
-4	-2	-5
-2	-1	-4
0	0	-2
2	1	0
4	2	4

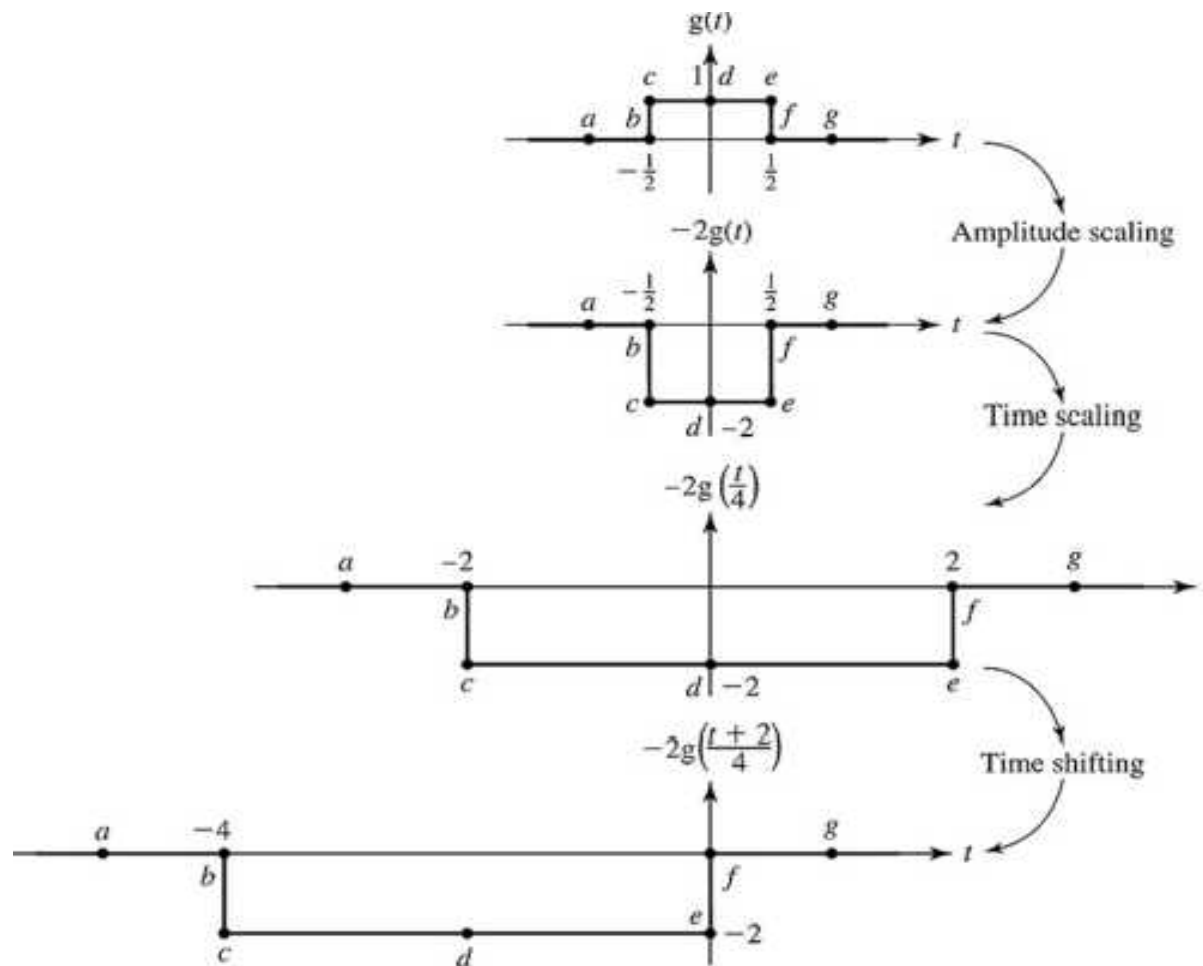
Escalamiento en el tiempo



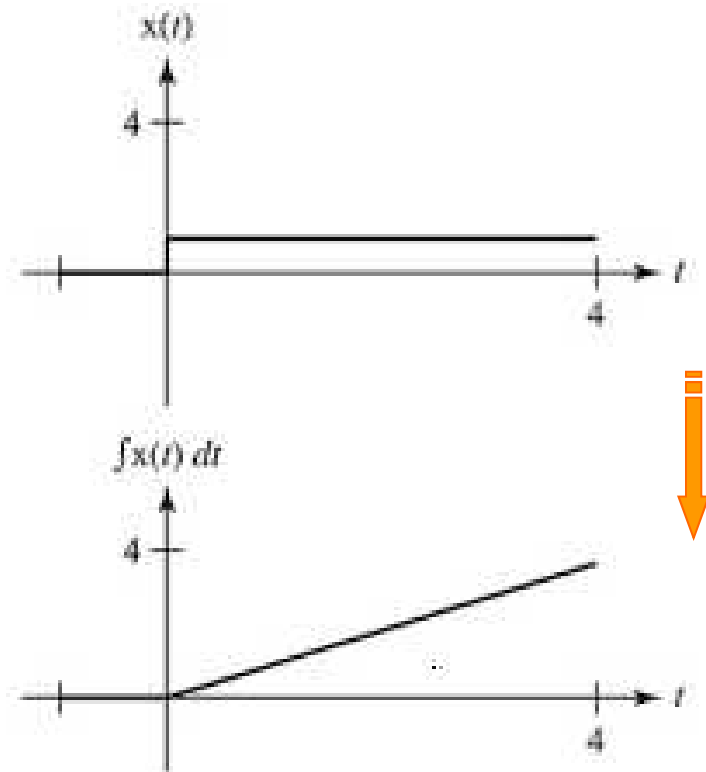
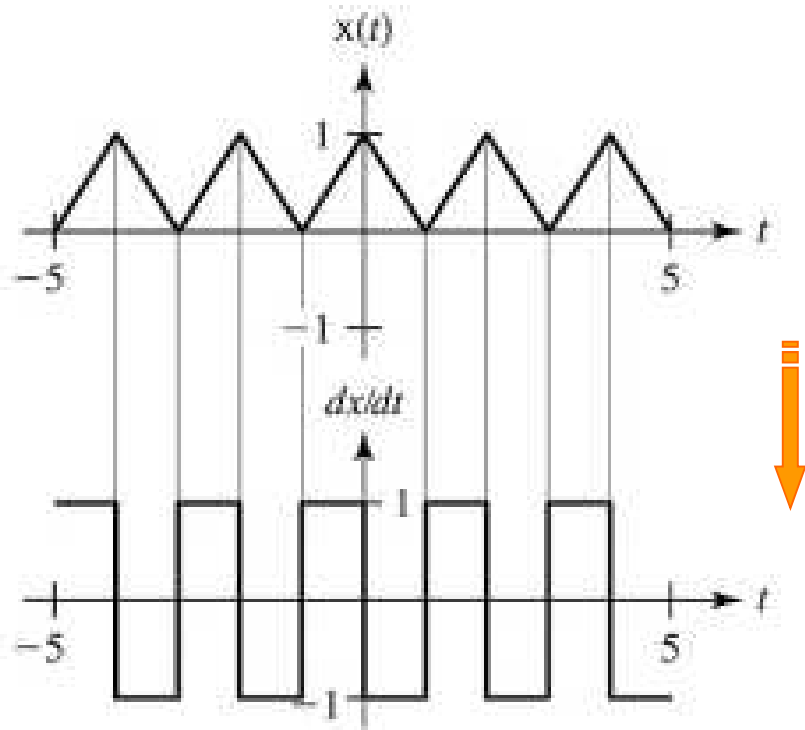
$$t \longrightarrow -t/2$$

t	$-t/2$	$g(-t/2)$
-4	2	4
-2	1	0
0	0	-2
2	-1	-4
4	-2	-5

Transformaciones múltiples



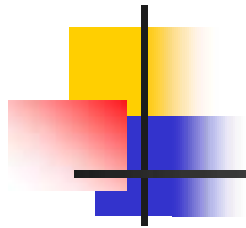
Diferenciación e Integración





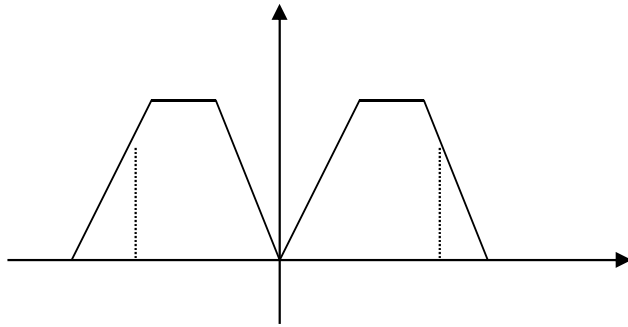
Funciones Par e Impar en TC

- Función par $\implies g(t) = g(-t)$
- Función impar $\implies g(t) = -g(-t)$
- Una forma de reconocer una función par, el eje de las ordenadas es un espejo.
- Para una función impar las mismas dos imágenes son en espejo negativas una de otra.

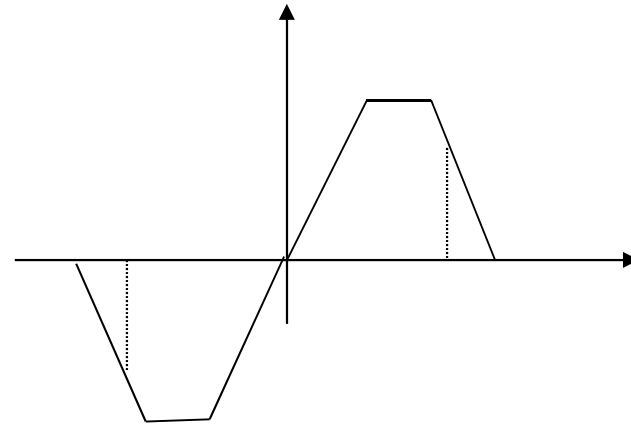


Funciones Par e Impar en TC

Par



Impar





Ni Par Ni Impar

- ✓ Cualquier función $g(t)$, incluso si no es par ni impar, puede expresarse como la suma de sus partes par e impar:

$$g_e(t) = \frac{g(t) + g(-t)}{2} \quad g_o(t) = \frac{g(t) - g(-t)}{2}$$

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$



Funciones periódicas en TC

- ❖ Una función $g(t)$ es periódica si
- ❖
$$g(t) = g(t + nT)$$
- ❖ Para cualquier valor entero de n donde T es el período de la función.
- ❖ El intervalo mínimo positivo para el cual se repite la función es el período fundamental T_0 .
- ❖ La frecuencia fundamental $f_0 = 1/T_0$ ciclos/seg ó Hz (Hertz)
- ❖ La frecuencia fundamental en radianes por segundo $\omega_0 = 2\pi f_0$.



Ej. $f(t) = \cos w_1 t + \cos w_2 t$

- ✓ Si la función es periódica con período T , entonces es posible encontrar dos enteros m y n tales que
 - ✓ $w_1 T = 2\pi m$ $w_1/w_2 = m/n$
 - ✓ $w_2 T = 2\pi n$
- ✓ Es decir la relación w_1/w_2 debe ser un número racional.

Señales periódicas exponencial compleja y senoidal

- ✓ Consideremos la siguiente exponencial compleja :

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$


- ✓ Propiedad importante: es periódica

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

- ✓ Para ser periódica

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \quad \star$$

Señales exponenciales y senoidales

- ✓ Si $\check{S}_0 = 0$ entonces $x(t) = 1$ periódica para cualquier valor de T .
- ✓ Si $\check{S}_0 \neq 0$ entonces el período fundamental T_0 , el valor positivo más pequeño de T que cumple con 

$$T_0 = \frac{2f}{|\check{S}_0|}$$

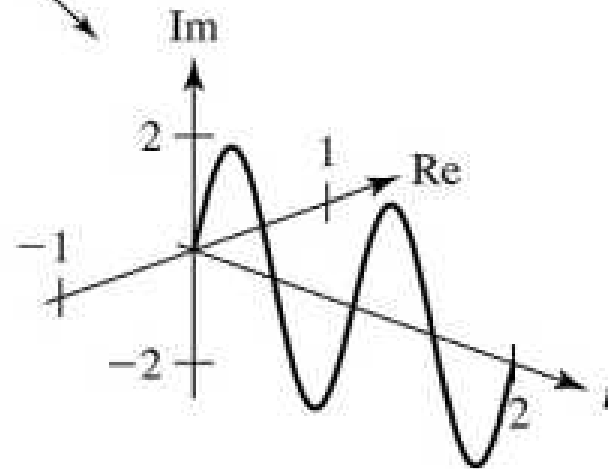
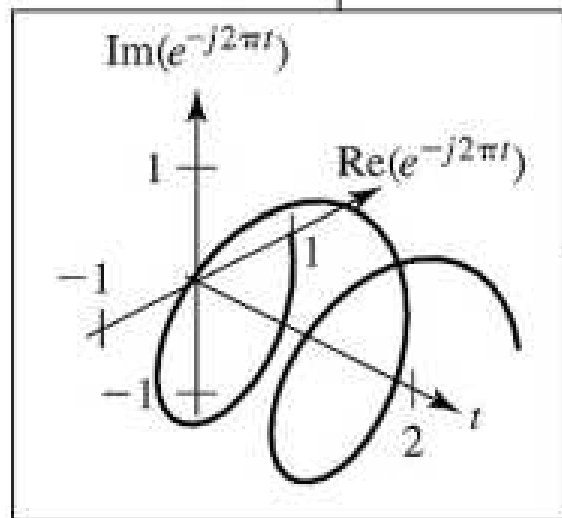
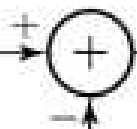
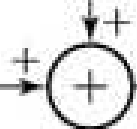
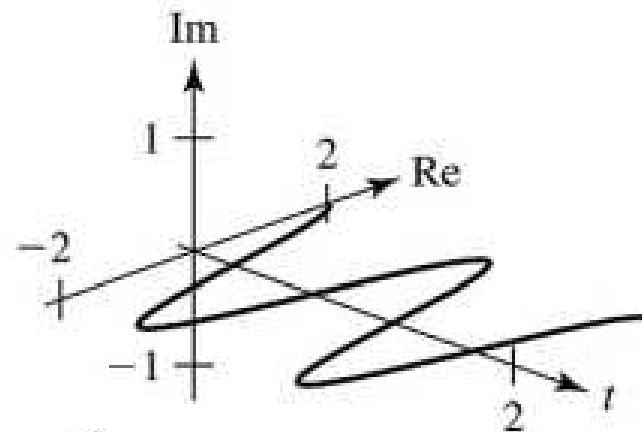
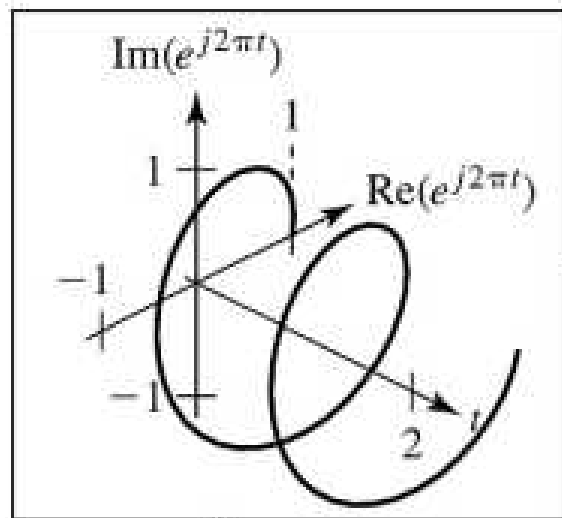
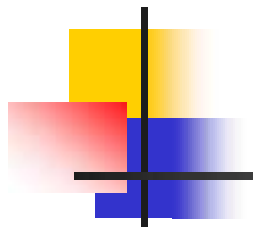


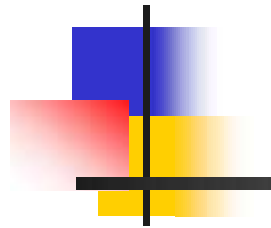
Recordando relación :
exponencial compleja \Rightarrow señal senoidal

$$e^{j\check{S}_0 t} = \cos \check{S}_0 t + j \operatorname{sen} \check{S}_0 t$$

$$\cos \check{S}_0 t = \frac{e^{j\check{S}_0 t} + e^{-j\check{S}_0 t}}{2} = \operatorname{Re}\{e^{j\check{S}_0 t}\}$$

$$\operatorname{sen} \check{S}_0 t = \frac{e^{j\check{S}_0 t} - e^{-j\check{S}_0 t}}{2j} = \operatorname{Im}\{e^{j\check{S}_0 t}\}$$

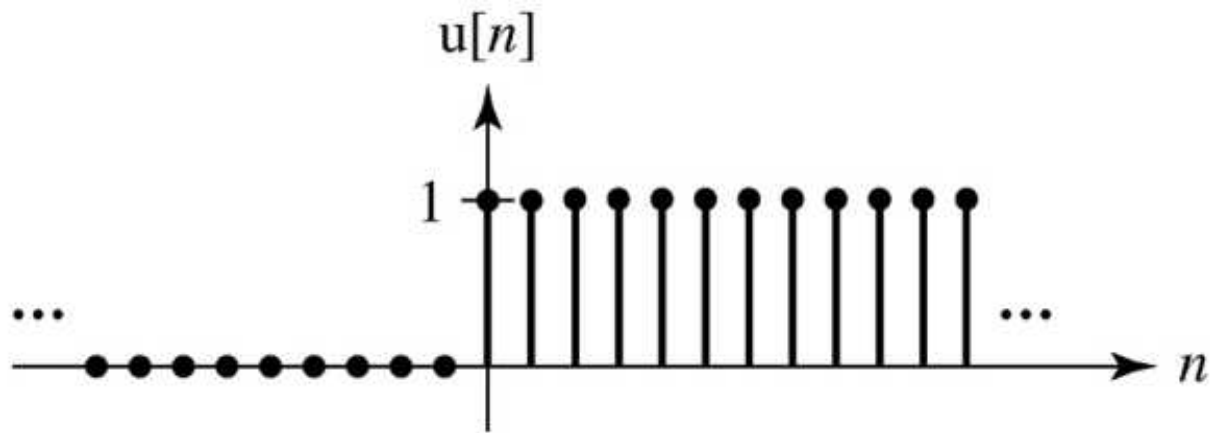




FUNCIONES DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

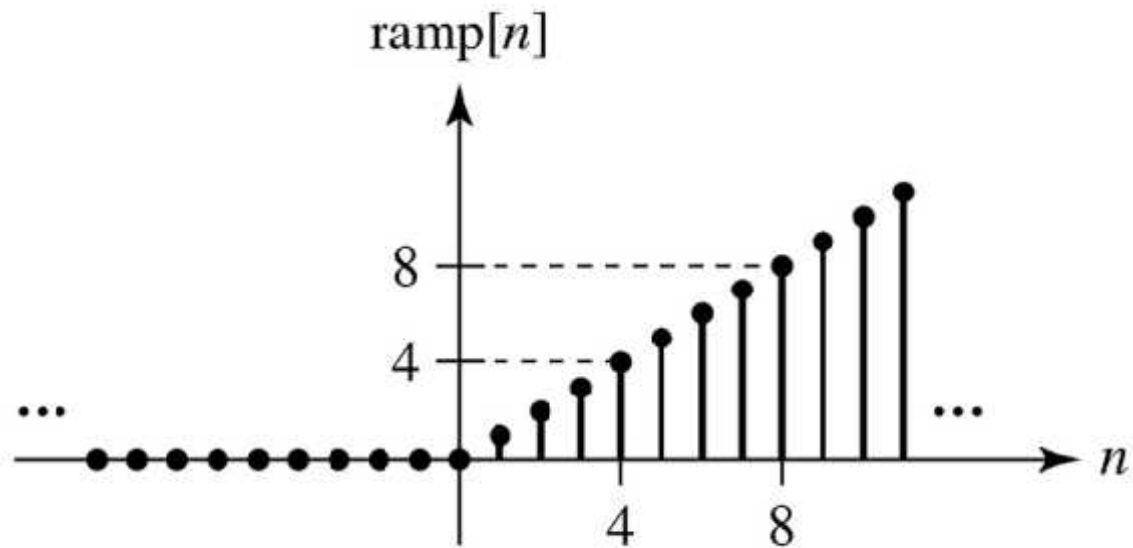


Secuencia unitaria



$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

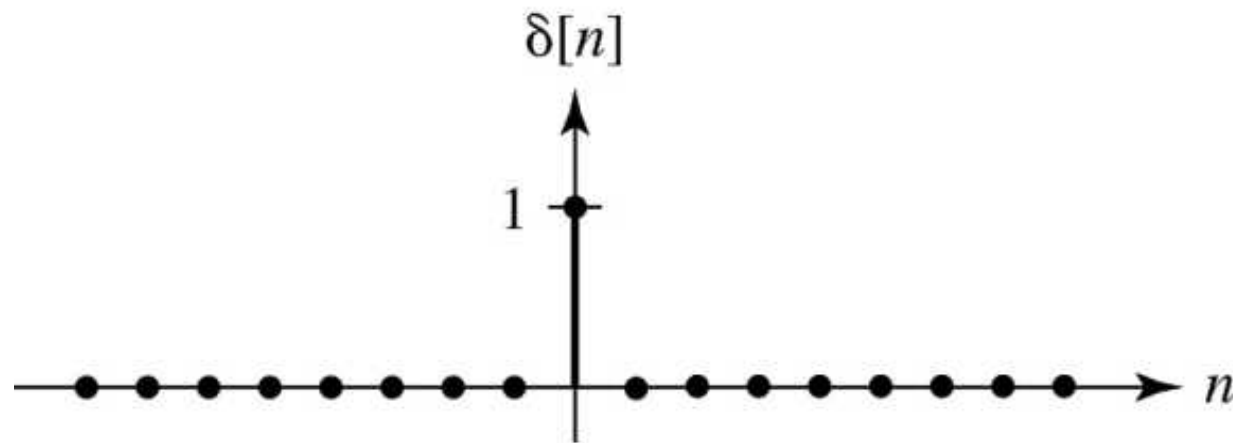
Función rampa unitaria



$$rampa[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

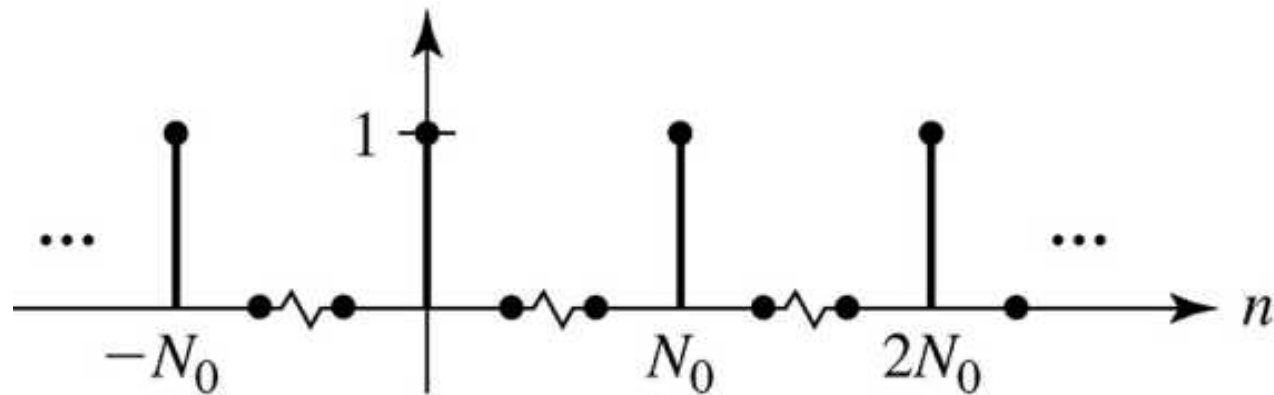


Impulso unitario



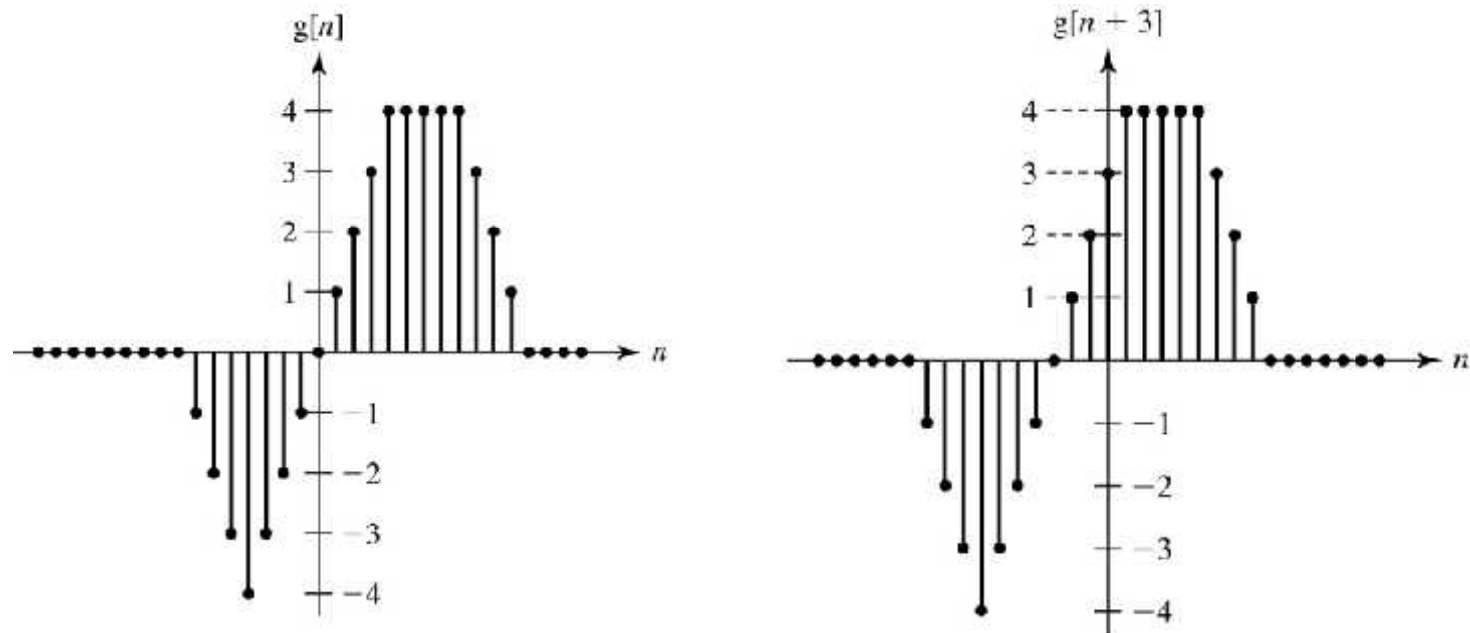
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Tren de impulsos unitarios



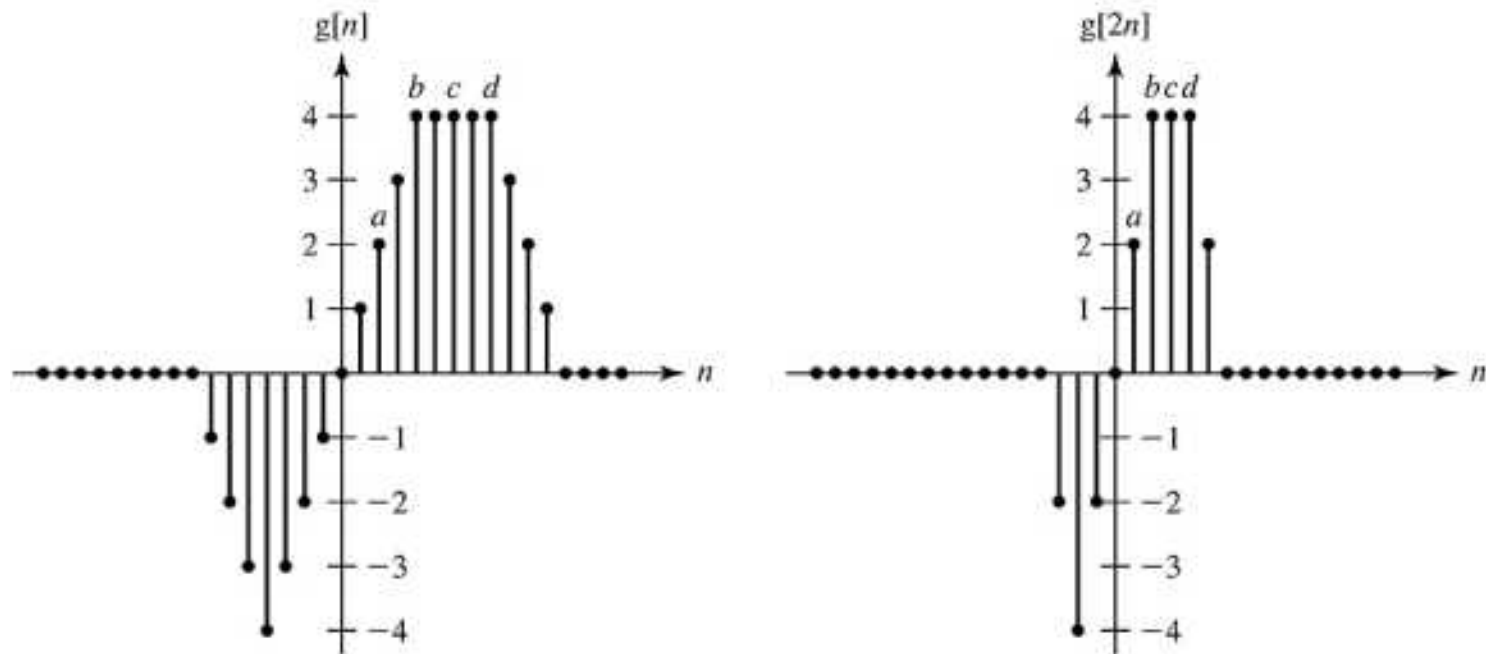
$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u[n - m N_0]$$

Desplazamiento en TD





Escalamiento en TD





Funciones Par e Impar en TD

- Es par si $\implies g[n]=g[-n]$
- Es impar si $\implies g[n]=-g[-n]$
- Igual que en TC, definimos

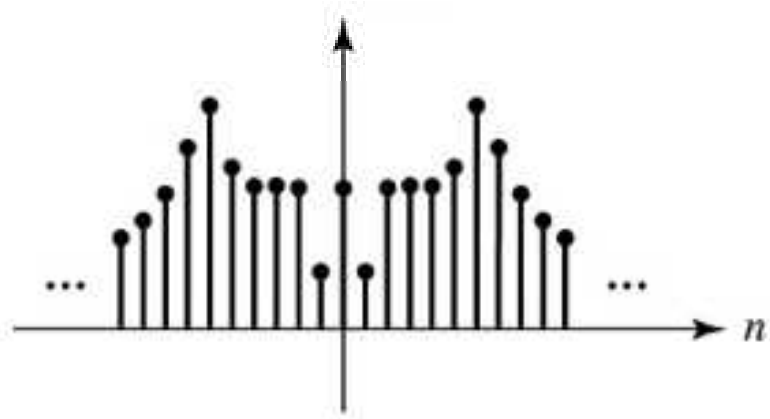
$$g_e[n] = \frac{g[n] + g[-n]}{2}$$

$$g_o[n] = \frac{g[n] - g[-n]}{2}$$

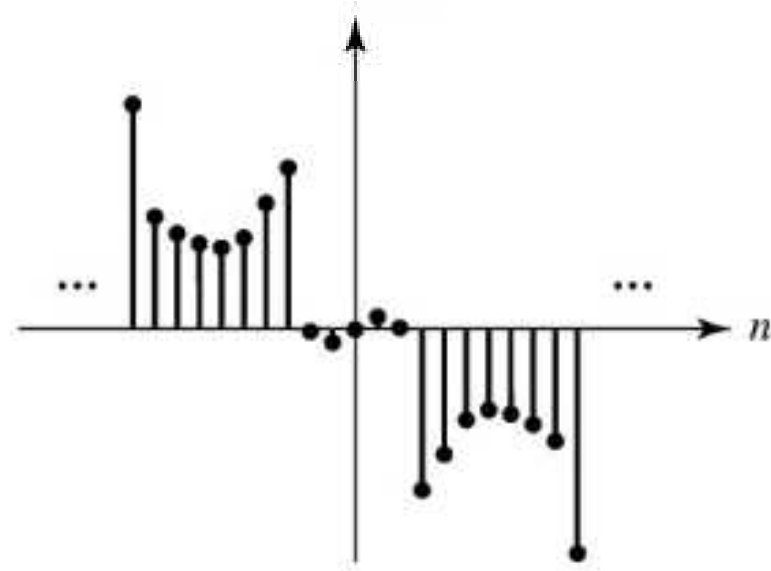


Ejemplos

Par



Impar



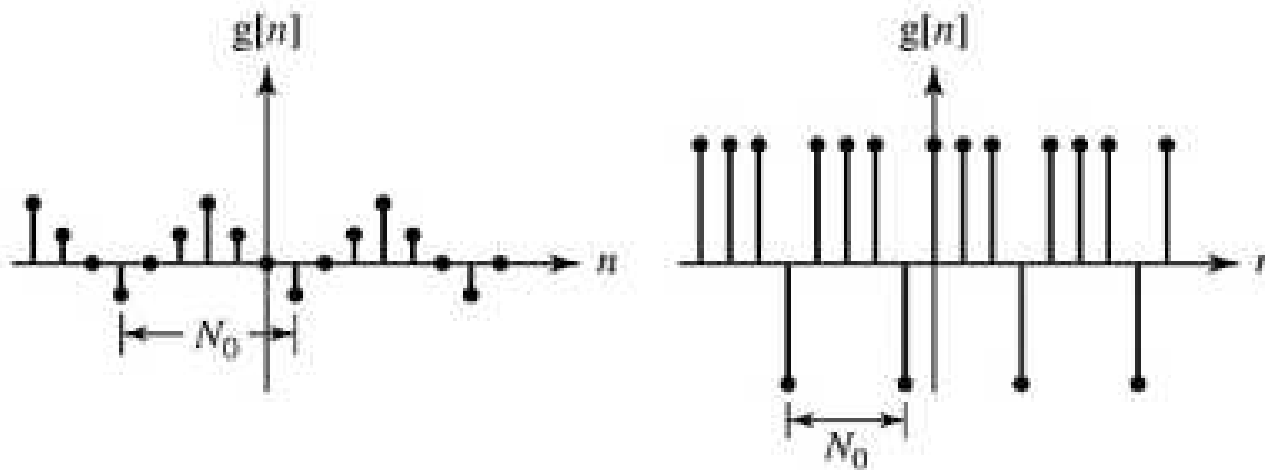


Funciones periódicas en TD

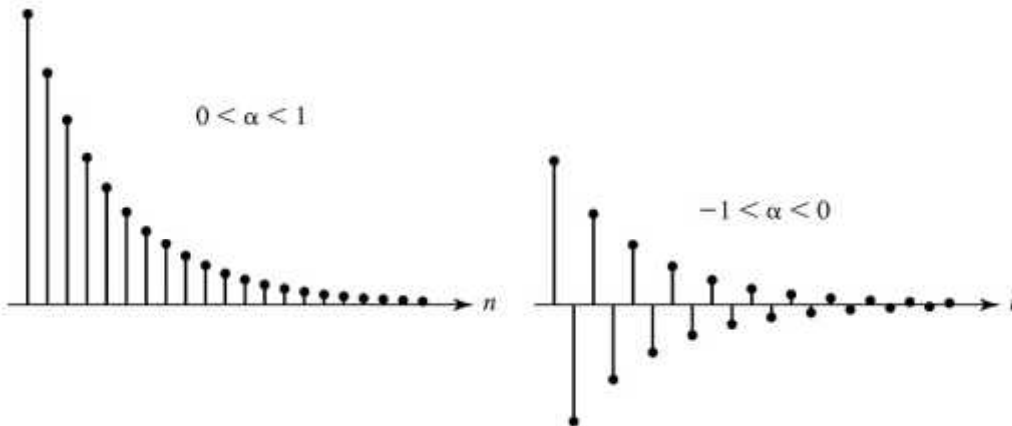
- Una función $g[n]$ es periódica si
- $g[n] = g[n + mN]$
- Para cualquier valor entero de m donde N es el período de la función.
- El intervalo mínimo positivo para el cual se repite la función es el período fundamental N_0 .
- La frecuencia fundamental $f_0 = 1/N_0$ ciclos/muestra
- La frecuencia fundamental en radianes por muestra $\omega_0 = 2\pi f_0$.



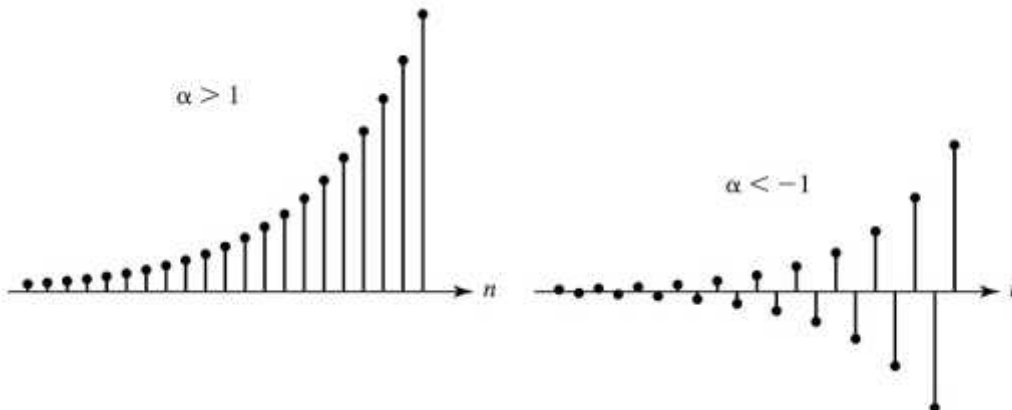
Funciones periódicas en TD



Exponencial real en TD



$$x[n] = C r^n$$





Periodicidad de exponenciales discretas(1)

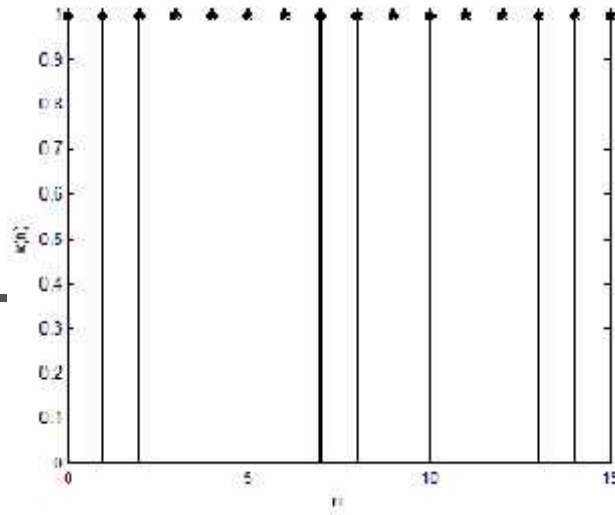
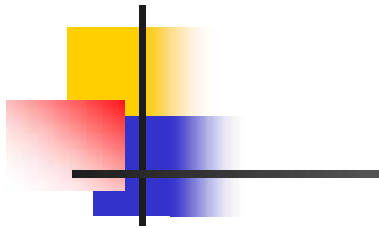
- Para tiempo continuo vimos dos propiedades de $e^{j\omega_0 t}$
- Mientras más grande la magnitud de ω_0 mayor será la velocidad de oscilación de la señal.
- Es periódica para cualquier valor de ω_0 .
- Veamos estas propiedades en TD



Periodicidad de exponenciales discretas(2)

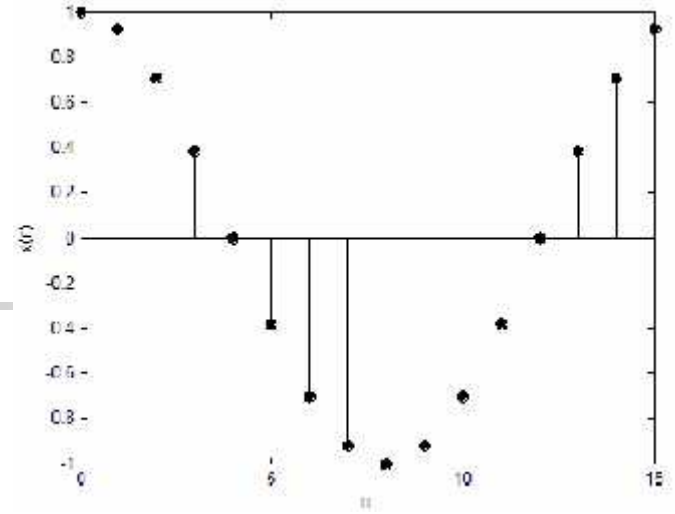
$$e^{j(\check{S}_0+2f)n} = e^{j2fn} e^{j\check{S}_0n} = e^{j\check{S}_0n}$$

Vemos que la exponencial $w_0+2\pi$ es la misma con frecuencia w_0 . Diferente al caso continuo, donde las señales son distintas para distintas w_0 . Por lo tanto al considerar exponenciales complejas, necesitamos solamente tomar el intervalo de frecuencia de longitud 2π dentro del cual se escoge w_0 . Conforme w_0 se incrementa desde 0, la señal oscila más rápido hasta π . Seguimos aumentando w_0 hasta 2π y la señal oscila más lento hasta producir la misma secuencia que en $w=0$.

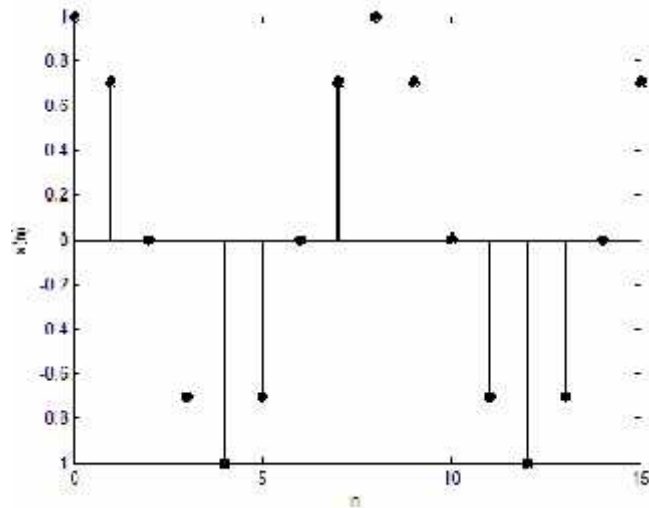


$$y[n] = \cos[\check{S}n]$$

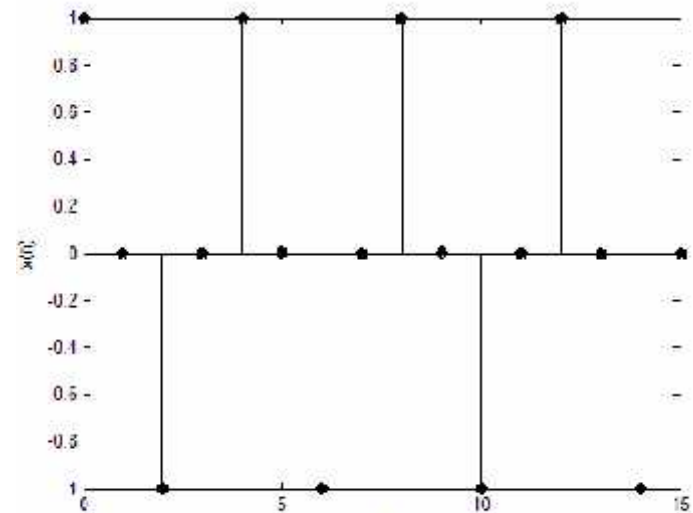
$$\check{S} = 0 \Rightarrow \cos[0n]$$



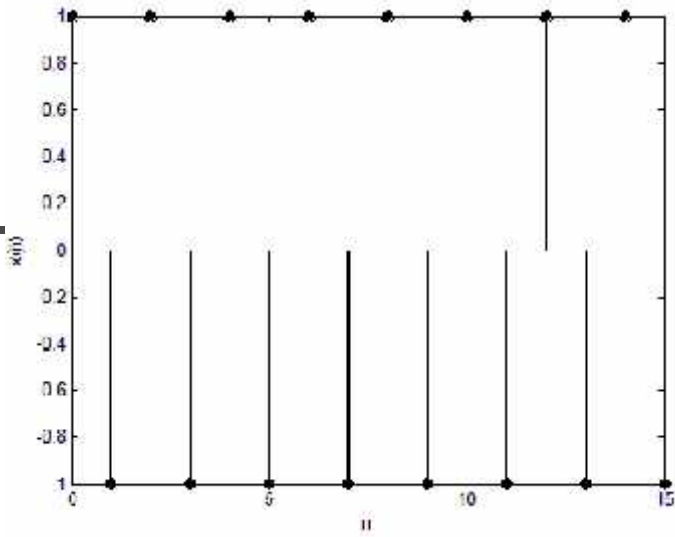
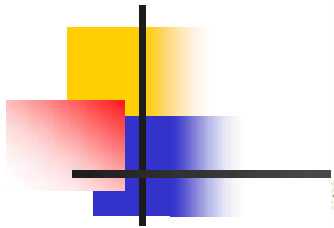
$$\check{S} = \frac{f}{8} \Rightarrow \cos\left[\frac{fn}{8}\right]$$



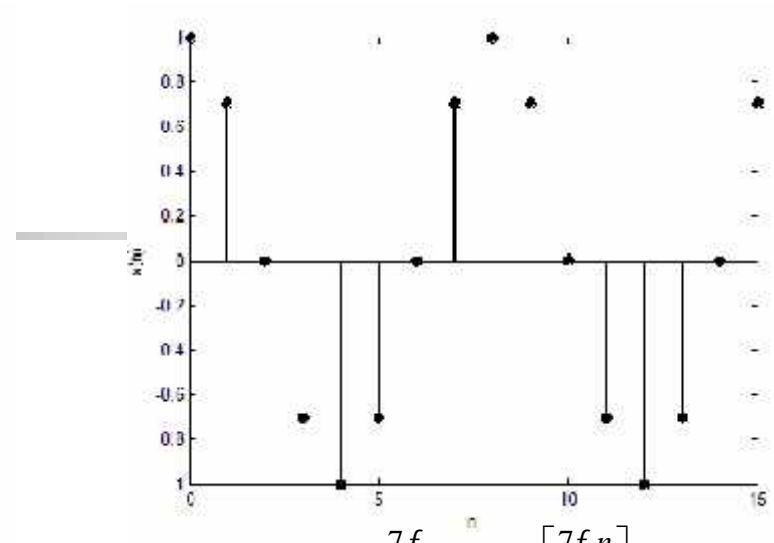
$$\check{S} = \frac{f}{4} \Rightarrow \cos\left[\frac{fn}{4}\right]$$



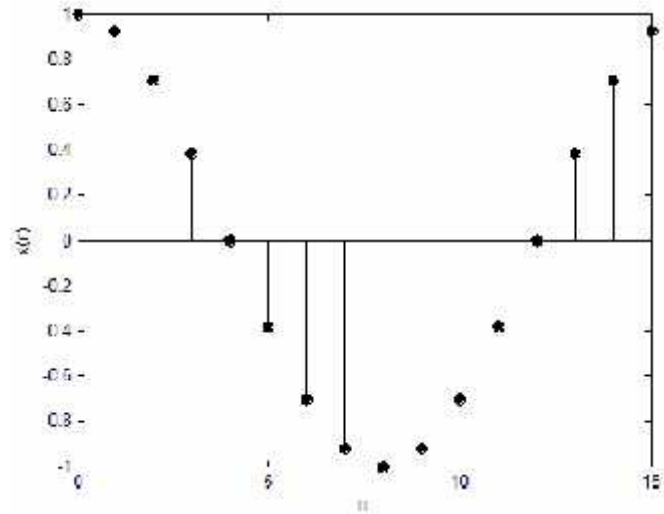
$$\check{S} = \frac{f}{2} \Rightarrow \cos\left[\frac{fn}{2}\right]$$



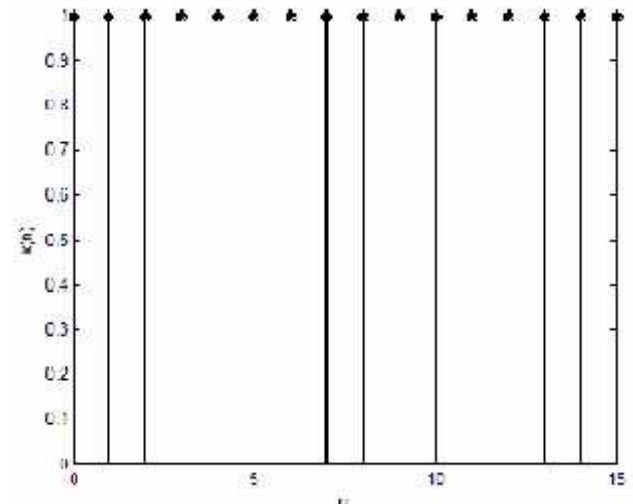
$$\check{S} = f \Rightarrow \cos[fn]$$



$$\check{S} = \frac{7f}{4} \Rightarrow \cos\left[\frac{7fn}{4}\right]$$



$$\check{S} = \frac{15f}{8} \Rightarrow \cos\left[\frac{15fn}{8}\right]$$



$$\check{S} = 2f \Rightarrow \cos[2fn]$$



Periodicidad de exponenciales discretas(3)

- ❖ La segunda propiedad respecto de la periodicidad de la exponencial compleja discreta. Para ser periódica :

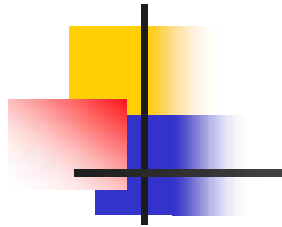
$$e^{j\check{S}_0(n+N)} = e^{j\check{S}_0n} \quad e^{j\check{S}_0N} = 1$$

- ❖ Debe haber un entero m tal que
- ❖ $w_0N = 2\pi m \quad w_0/2\pi = m/N$



Periodicidad de exponenciales discretas(4)

- De acuerdo con lo anterior, la exponencial es periódica si $w_0/2\pi$ es un número racional y es no periódica en otras circunstancias.



$e^{j\check{S}_0 t}$	$e^{j\check{S}_0 n}$
Señales distintas para distintos valores de w_0	Señales idénticas para valores de w_0 separados 2π
Periódica para cualquier w_0	Periódica sólo si $w_0 = 2\pi m/N$ con m y N enteros
Frecuencia fundamental w_0	Frecuencia fundamental w_0/m
Período fundamental $2\pi/w_0$	Período fundamental $2\pi m/w_0$