FISICA CUANTICA. FISICA MEDICA 2022

Práctica N°3

Operadores. Principio de incerteza. Resolución de la ecuación de Schrödinger unidimensional.

1. Sean $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ operadores lineales, y $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ el conmutador de $\hat{A}$ con $\hat{B}$. Empleando la definición anterior demostrar que se cumple:

   (a) $[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}] + [\hat{A},\hat{C}]$

   (b) $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$

   (c) Empleando los resultados anteriores hallar $[\hat{A},\hat{B}^2]$, $[\hat{A},\hat{B}^3]$

   (d) A partir de los resultados previos hallar la expresión general
   $[\hat{A},\hat{B}^n]=\sum_{s=0}^{s=n-1} B^s[\hat{A},\hat{B}]B^{n-s-1}$ $(n \geq 1)$

   (e) En particular si $\hat{A} = \hat{q}$ y $\hat{B} = \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ tales que $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$ y $F(q,p)$ es una función arbitraria de $\hat{q}$ y $\hat{p}$, empleando el resultado anterior hallar
   $[\hat{q},\hat{p}^n] = ni\ \hbar\ \hat{p}^{n-1}$;
   $[\hat{q}^n,\hat{p}] = ni\ \hbar\ \hat{q}^{n-1}$;
   $[\hat{p},\hat{F}] = -i\ \hbar\ \frac{\partial F}{\partial q}$;
   $[\hat{q},\hat{F}] = i\ \hbar\ \frac{\partial F}{\partial p}$;

   (f) Evaluar el punto anterior cuando $F(q,p) = H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$.

2. La función de onda de una partícula que se mueve en un espacio unidimensional es de la forma:

$$\phi(x) = N\frac{e^{ip\ x/\hbar}}{\sqrt{x^2+a^2}}, \tag{1}$$

   donde a y p son constantes reales y N es el coeficiente de normalización.

   (a) Hallar N

   (b) Hallar la probabilidad de que la partícula esté localizada en el intervalo $[-a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3}]$

   (c) Calcular el valor medio de la cantidad de movimiento $\hat{p}$

3. En su forma general el principio de incertidumbre se enuncia:

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}| < \psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi > | \tag{2}$$

   donde $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son operadores correspondientes a observables físicos en un estado arbitrario ψ, que obedecen a la relación de conmutación $[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$. Y $\Delta\hat{A} = \hat{A}- < \hat{A} >$ y $\Delta\hat{B} = \hat{B}- < \hat{B} >$ son los operadores que indican las desviaciones con respecto a los respectivos valores medios

$$< \hat{A} >= \int \psi^*\hat{A}\psi\ \ dx \qquad < \hat{B} >= \int \psi^*\hat{B}\psi\ \ dx \tag{3}$$

   donde $\Delta\hat{A}$ y $\Delta\hat{B}$ verifican $[\Delta\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$.

   Estimar la incerteza mínima en el impulso $\Delta\hat{p}$ y en la velocidad $\Delta\hat{v}$, en cada uno de los casos:

   (a) Una partícula de masa 1 kg, confinada en una región de 1 m.

   (b) Un electrón de masa $9,1\times10^{-31}$ kg, confinado en la región del átomo, 10^{-10} m.

   (c) Un protón de masa $1,67\times10^{-27}$ kg, confinado en la región del núcleo, 10^{-15}m.

   (d) Emplear 3b) y 3c) para comparar el orden de magnitud en la energía cinética del electrón (en el átomo) y del protón (en el núcleo), $E = \frac{p^2}{2m}$, en unidades de eV $(1eV = 1,6\times10^{-19}J)$

4. Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje x con impulso p, partiendo desde $x = -\infty$. Si incide sobre una barrera de potencial repulsiva de la forma

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ V_0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{Con } V_0 > 0$$

(a) Calcule los coeficientes de reflexión R y de transmisión T para el caso $E > V_0$.

(b) Grafique estos coeficientes en función de E/V_0 .

(c) En el caso $E < V_0$ estime la longitud de penetración de la partícula dentro de la barrera. Use el principio de incerteza para demostrar que la energía cinética de la partícula no puede ser negativa dentro de la barrera.

Barrera

5. Resolver el problema de una partícula de masa m bajo la acción de un potencial cuadrado de la forma

$$V(x) = \begin{cases} +V_0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq a \\ \\ 0 & \quad x < 0 \ y \ x > a \end{cases} \qquad \text{Con } V_0 > 0$$

(a) Calcule los coeficientes de reflexión R y de transmisión T cuando $E > V_0 > 0$.

(b) Obtener una expresión aproximada para el coeficiente de transmisión cuando

$$E < V_0 \ \ y \ \ ka = \sqrt{\frac{2mV_0(1-\frac{E}{V_0})}{\hbar^2}}a \ \gg \ 1 \tag{4}$$

(c) Obtener un resultado aproximado para el coeficiente de transmisión a través de una barrera de forma arbitraria. Para ello divida la barrera en pequeñas barreras rectangulares de ancho Δx, asigne a cada una un coeficiente de transmisión T_i dado por la parte principal, es decir por el factor exponencial del coeficiente obtenido en la parte a). Escriba una expresión para el $\ln T$ donde T representa el coeficiente de transmisión de toda la barrera, cuando $x \to 0$.

(d) Empleando el resultado anterior calcule el coeficiente de transmisión a través de la barrera de potencial nuclear para la partícula. Este potencial puede ser aproximarse como:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si} \quad 0 \leq r < R \\ \\ \frac{2(Z-2)e^2}{r} & \text{si} \quad r \geq R \end{cases}$$

donde R es el radio nuclear, que está dado por $R = 1,2A^{1/3}$ Fermi, donde A representa el número másico y Z el número atómico del núcleo padre. Para simplificar la integración considere que si d es el intervalo en el cual $V > E$, en general $d \gg R$.

(e) Estime la vida media nuclear y la probabilidad de desintegración α partir del cálculo de p y de la frecuencia con que la partícula choca contra las "paredes nucleares", suponiendo que la partícula α tiene la misma energía en el interior del núcleo.

6. Idem al inciso 5a para el caso $V = -V_0 < 0$ y $E > 0$ con $V_0 > 0$.

7. *Pozo*

(a) Calcule las energías de los estados estacionarios, cuando $-V_0 < -E < 0$, en el caso

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si} \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \geq |\frac{a}{2}| \end{cases} \qquad \text{Con } V_0 > 0$$

(b) Represente gráficamente este resultado para el caso de un electrón, con $V_0 = 20\ eV$ y $a = 0,1$ nm.

(c) Calcule los coeficientes de reflexión R y de transmisión T, pero en este caso con cuando $E > 0$. Antes de resolver este inciso, repasar el problema 6.