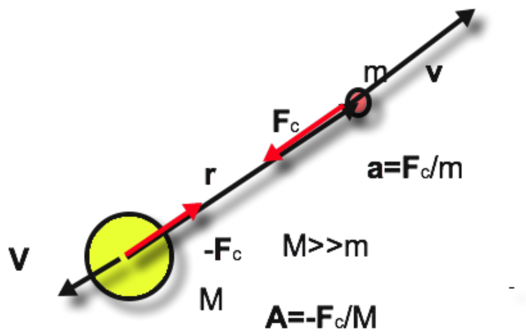
5.4 Conservación de la energía mecánica

Recordemos que habiamos definido la energía potencial con la fuerza actuante entre dos partículas, una mucho más masiva (M) que la otra (m) y que considerabamos casi en reposo o a velocidad constante (recordemos que podemos tomar un sistema de referencial inercial sobre una partícula no acelerada). De ésta manera pensabamos en una partícula en un "campo de fuerzas" generador por la otra que poniamos en el origen de coordenadas por comodidad. Sin embargo es un sistema de dos partículas y más adelante estudiaremos como extender nuestros conceptos definidos para una partícula a un sistema, pero por el momento podriamos deninir la energía mecánica de este sistema como la suma de la energía cinética más la potencial de interacción

$$\begin{aligned} E_M &= E_c + U_c \\ E_c &= \frac{1}{2}M\mathrm{V}^2 + \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 \\ U_c &\equiv U_c(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector relativo de la partícula liviana respecto a la pesada. Notemos que la energía potencial la contamos una sóla vez porque es la de interacción entre las partículas, no es algo individual y que por el principio de acción y reacción es percibida por ambas partículas. Sin embargo debido a la masa la aceleración sufrida por la más masiva y mucho menor que la sufrida por la otra.



Como la aceleración **A** será practicamente despreciable cuando el sistema experimente un cambio tendremos $\Delta E_M = \Delta E_c + \Delta U_c$ con $\Delta E_c = \Delta E_c^M + \Delta E_c^m \approx \Delta E_c^m, \Delta U_c = U_c(\mathbf{r}_f) - U_c(\mathbf{r}_i)$,donde como el cuerpo M tiene velocidad casi constante podemos pensar que $\mathbf{r}$ mide la posición instantanea de m respecto al origen de coordenadas colocado en M. Por lo tanto aunque hablemos de cambios en la partícula más liviana y pongamos $E_M = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + U_c(\mathbf{r})$ debemos recordar que se encuentra en interacción con otra. Además podriamos tener más de una fuerza conservativa que actua entre ambas partículas entonces allí cambiaremos $U_c \rightarrow \sum_c U_c$, por ejemplo atracción gravitacional y fuerza eléctrica. Además podriamos tener fuerzas no conservativas (nc) entre ambas partículas por ejemplo cuando un patinador se mueve sobre la tierra, hay roce entre los patines y el suelo.

Habiemdo hecho estas aclaraciones supongamos que la fuerza neta actuando sobre la partícula m es $\mathbf{F}_N = \sum_c \mathbf{F}_c + \sum_{nc} \mathbf{F}_{nc} + \sum_{ext} \mathbf{F}_{ext}$, pues la fuerza neta esta compuesta por fuerzas conservativas internas, no conservativas internas y otras que podriamos llamar "externas" al sistema, y el trabajo de dicha fuerza neta vimos antes que lo podemos conectar con la variación de energía cinética

$$W_{\mathbf{F}_N}^{if} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_f^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_i^2 \equiv \Delta E_c^{if}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
W^{if}_{\mathbf{F}_N} &= \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_c \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_{nc} \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_{ext} \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r} = \\
&= \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_{nc} \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_{ext} \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r} - \Delta \left(\sum_c U_c \right)^{if} \\
&\equiv \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_{nc} \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C},\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \sum_{ext} \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r} - \Delta U^{if},
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la definición de energía potencial, y donde notamos que el trabajo de las no conservativas, y en general de las externas , dependerá de la trayectoria seguida por la partícula. Asi tendremos finalmente juntando ambas ecuaciones anteriores

$$
\boxed{\Delta E^{if}_M = \Delta E^{if}_c + \Delta U^{if} \quad = \quad W^{if}_{\mathcal{C},nc} + W^{if}_{\mathcal{C},ext}.}
$$

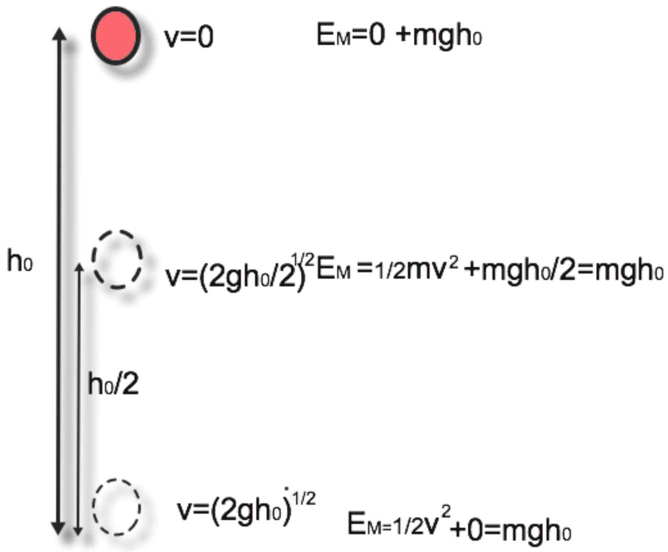
Que es el teorema trabajo -variación de energía mecánica. Esta expresión nos dice que *cuando las fuerzas no conservativas no realicen* trabajo (que no es lo mismo que decir que no hayan fuerzas no conservativas) y el sistema esté aislado, se conservará la energía mecánica del sistema

$$
\Delta E^{if}_M \quad = \quad \Delta E^{if}_c + \Delta U^{if} = 0 \Longrightarrow E^i_M = E^f_M.
$$

Que el trabajo de las fuerzas no conservativas sea nulo puede darse en diversas circunstancias, por ejemplo cuando no hay fuerzas no conservativas como en la ausencia de roce o cuando sean ortogonales a la trayectoria y no realicen trabajo, como la normal a una superficie que es no conservativa (no podemos asociarle una energía potencial) o las tensiones en las cuerdas. Finalmente mencionemos que hay situaciones donde tenemos fuerzas externas que actuan sobre una partícula, por ejemplo si un cuerpo desliza por un plano inclinado y a su vez es empujado por una fuerza externa al sistema partícula-plano-tierra, diferente al peso o a la fuerza de roce. Entonces consideramos que estamos metiendo o sacando energía mecánica del sistema mediante el trabajo de esta (o estas si hubiera varias) fuerza, como cuando el amigo de Pablito se olvidaba (o llevaba sin mala intención) los cubitos. Asi podemos agregar un término $W^{if}_{C,ext}$ que cuente el trabajo de las fuerzas externas al sistema.

Ejemplo 1

Cuando un cuerpo de masa m realiza una caida libre en el vacio puede comprobarse usando cinemática que la cantidad $E_M = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + mgh$ permanece constante durante la caida, ya que no habra roce con el aire y $W_{nc} = 0$

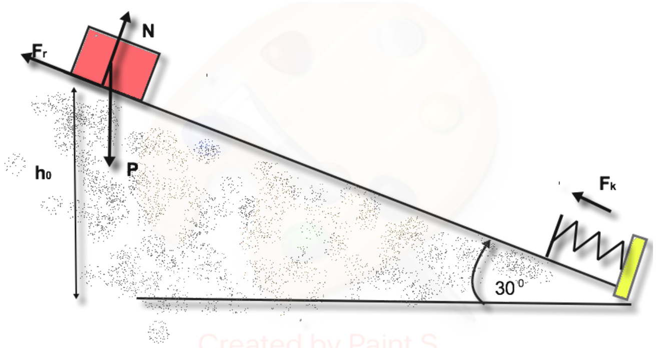


Observemos que la energía cinética y potencial no se conservan por separado, sino que puede haber transformación entre ambas a medida que el cuerpo cae conservandose la total o mecánica. Pablito podía esconder 3 cubitos un día en su caja y 25 en la bañera o 10 en su caja y 18 en la bañera pero siempre tendremos 28. Cuando hay fuerzas no conservativas (o disipativas) que realizan trabajo, no es que no haya conservación de la energía en general, sino que no se conserva la energía mecánica porque se produce una transformación de parte de dicha energía mecánica en energía interna (agitación de atomos y moléculas) de los cuerpos en fricción, es decir una transformación de energía mecánica a otra forma de energía que aún no hemos considerado. El incremento de energía interna va acompañado normalmente con una aumento de temperatura y ya veremos en el próximo curso de Física que dependiendo de los materiales en contacto y de ese aumento de temperatura puede calcularse el cambio en la energía interna. Así por ejemplo nos frotamos las manos para calentarnos. Si ahora consideraramos a la energía del sistema como $E_M + E_{int}$ tendriamos conservación de la energía.

La solución de problemas utilizando el teorema trabajo-variación de energía mecánica es apropiada cuando queremos conocer magnitudes del sistema después de una transformación o proceso sabiendo cuales son las condiciones iniciales, las energias potenciales presentes en el problema y como actuan las fuerzas no conservativas. Este procedimiento suele ser mas sencillo que resolver directamente las ecuaciones de movimiento para las partículas y fuerzas presentes.

Ejemplo 2

Desde la parte superior de un plano inclinado se suelta un cuerpo de masa $m = 20kg$ desde una altura de h_0 =5m. El plano tiene una inclinación de 30^0 y en su parte inferior se encuentra un resorte de constante $2000N/m$. El plano inclinado tiene un coeficiente de roce con el cuerpo $\mu_d = 0.5$. Determinar cuanto se comprime el resorte cuando llega a la parte inferior.



La energía potencial del sistema tierra-cuerpo (el plano está sujeto a la tierra) es $U = mgh + \frac{1}{2}k\Delta x^2$ donde Δx es el estiramiento o compresión, y hemos puesto nuestro eje x a lo largo del plano . Las fuerzas no consevativas presentes son la normal $\mathbf{N} = N\hat{j}$ que no realiza trabajo y la fuerza de roce constante $\mathbf{F}_r = -N\mu_d\hat{i}$. Vemos que la normal es $N = mgcos30^0$. Asi, si aplicamos el teorema trabajo-energía a este ejemplo tendremos (L es la longitud del plano inclinado)

$$\begin{aligned}
W_{nc}^{if} &= E_M^f - E_M^i \\
W_{nc}^{if} &= NLcos90^0 + N\mu Lcos180^0 = 0 - mgcos30^0\mu L,\ L = h_0/sen30^0 \\
E_M^i &= 0 + mgh_0 + 0,\ E_M^f = 0 + 0 + \frac{1}{2}k\Delta x^2
\end{aligned}$$

ya que la energía cinética al comienzo y al final es nula. Notemos que hemos despreciado el Δx en el trabajo de la fuerza de roce suponiendo que es mucho menor que L. Así colocando los números tendremos

$$\begin{aligned}
-20 \times 9.8N \times 0.86 \times 0.5 \times \frac{5m}{0.5} &= \frac{1}{2}2000\frac{N}{m}\Delta x^2 - 20 \times 9.8N \times 5m \\
-842.8J &= 1000\frac{N}{m}\Delta x^2 - 980J \\
\Delta x &= \sqrt{\frac{980J - 842.8J}{1000N/m}} = 0.37m
\end{aligned}$$

que si es pequeño frente a $L = 10m$.

Finalmente si al bloque de este problema le agregamos una fuerza externa $\boldsymbol{F} = (2N\,cos30^0, 2N\,sen30^0)$ que forma 30^0 con el plano y empuja al cuerpo segun lo mencionado arriba deberiamos agregar $W_{ext}^{if} = Fdcos30^0 = 2N\frac{5m}{0.5}cos30^0 = 17.2J$. Ahora la normal es $N = mgcos30^0 - Fsen30^0 = 168.6N - 1N = 167.6N$ pues la fuerza externa sostiene al cuerpo y la fuerza de roce menor siendo $W_{nc}^{if} = -167.6N \times 0.5 \times \frac{5m}{0.5} = -838J$. Asi los $-842.8J$ del lado izquierdo deben ser reemplazados por $-838J + 17.2J = -820.8$. así tendriamos

$$\Delta x = \sqrt{\frac{980J - 820.J}{1000N/m}} = 0.4m,$$

o sea se comprime un poco más el resorte ya que debe frenar un cuerpo que es más veloz por efecto de la fuerza externa adicional que lo acelera y a su vez disminuye a la fuerza de roce pues disminuye la normal.