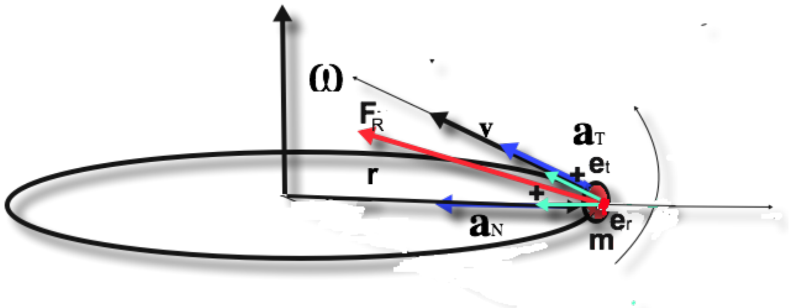
4.2 Dinámica del Movimiento circular

Hemos visto que el movimiento circular es intrisicamente acelerado, es decir aunque el módulo de la velocidad tangencial sea constante hay un cambio de dirección. Por lo tanto si hay aceleración según la 2da Ley de Newton debe haber fuerza resultante o neta $\mathbf{F}_R$ sobre la partícula que describe el movimiento circular. Esa fuerza podría ser ejercida mediante una cuerda, una pista circular, etc. Si bien un sistema de referencia que rote con la partícula no es un sistema de referencia inercial, podriamos imaginarnos en cada instante de tiempo un sistema de referencia inercial que tenga un eje en la dirección del radio y otro perpendicular y asi tangencial a la circunferencia, al primero lo llamamos "normal" y al otro "tangencial" con versores $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_t$ respectivamente. Podriamos definir como sentidos positivos hacia el centro y en el sentido antihorario .



Asi entonces podemos aplicar la 2da Ley de Newton a este caso haciendo una descomposición sobre los ejes normal y tangencial obteniendo

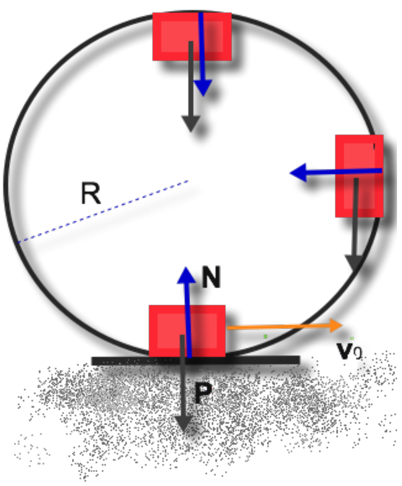
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= m\mathbf{a} \\ F_{R_N} &= m a_N \\ F_{R_T} &= m a_T \end{aligned}$$

donde $F_{R_{N,T}}, a_{N,T}$ son *componentes* con su respectivos signos de la fuerza resultante y aceleración a lo largo de las direcciones normales y tangenciales. Lo que si podemos ver que como siempre $a_N = \omega^2 R > 0$, entonces como la masa es una cantidad positiva la componente normal de la fuerza deberá ser positiva (según nuestra convención), es decir deberá apuntar hacia el centro para "obligar" a la partícula a describir un movimiento circular. La componente tangencial de la fuerza también deberá tener el mismo signo que la aceleración tangencial, pero como ésta es $a_T = \frac{\alpha}{\omega} v_T$ y α/ω puede ser postivo o negativo, es decir la fuerza puede frenar o acelerar tangencialmente a la partícula.

Ejemplos:

1) Supongamos tener una rampa que termina en un rulo de radio R sin roce y que un bloque de masa m ingresa al rulo con velocida v_0, alcanza el punto medio con $v_1 < v_0$, y el punto más alto con $v_2 < v_1$ (pues la componente tangencial del peso va frenando) y queremos saber :

a) Cuánto vale la normal que ejerce a la rampa cuando el bloque esta abajo, a media altura y en el punto más alto?
b) Cúal es la aceleración en cada punto mencionado en a)?
c) Cuál sería la velocidad mínima con que debe llegar arriba para no caer ?



Planteamos en cada posición la 2da ley de Newton. Cuando la partícula entra (posición 0) al rulo tenemos (recordemos que tomamos posivo hacia el centro)

$$
\begin{aligned}
F_{R_N} &= N_0 - mg = ma_N = mR\omega_0^2 = mv_0^2/R \\
N_0 &= mg + \frac{mv_0^2}{R} > mg, \qquad a_{N_0} = \frac{v_0^2}{R} \\
F_{R_T} &= 0 \rightarrow a_{T_0} = 0
\end{aligned}
$$

Cuando alcanza el punto medio (posición 1)

$$
\begin{aligned}
F_{R_N} &= N_1 = ma_N = mR\omega_1^2 = mv_1^2/R \\
N_1 &= \frac{mv_1^2}{R} < \frac{mv_0^2}{R} < \frac{mv_0^2}{R} + mg = N_0, \quad a_{N_1} = \frac{v_1^2}{R} < \frac{v_0^2}{R} = a_{N_0} \\
F_{R_T} &= -mg \rightarrow a_{T_1} = -g,
\end{aligned}
$$

como si fuera una caida libre en dicho momento. Final (posición 2)

$$
\begin{aligned}
F_{R_N} &= N_2 + mg = ma_N = mR\omega_2^2 = mv_2^2/R \\
N_2 &= -mg + \frac{mv_2^2}{R} < \frac{mv_2^2}{R} < \frac{mv_1^2}{R} \Rightarrow N_2 < N_1 < N_0, \quad a_{N_2} = \frac{v_2^2}{R} < \frac{v_1^2}{R} < \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow a_{N_2} < a_{N1} < a_{N_0} \\
F_{R_T} &= 0 \rightarrow a_{T_2} = 0,
\end{aligned}
$$

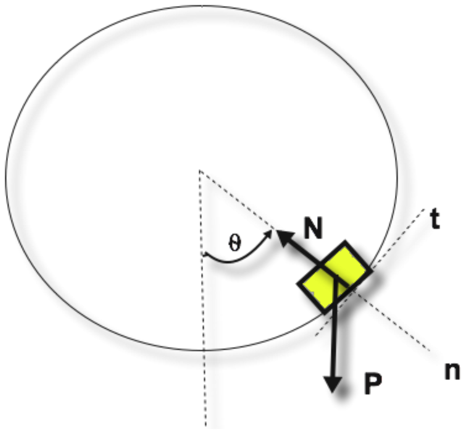
donde finalmente concluimos

$$
\begin{aligned}
N_0 = mg + \frac{mv_0^2}{R} &> N_1 > N_2 \geq 0 \\
a_{N_0} = \frac{v_0^2}{R} &> a_{N1} > a_{N_0}.
\end{aligned}
$$

No podemos ver cuanto vale exactamente la velocidad en 1 por ejemplo porque desde 0 hasta 1 la aceleración tangencial no es contante pues la componente tangencial del peso va cambiando con el ángulo.

Si la partícula llega arriba y no queremos que caiga siguiendo su movimiento circular, notemos que como$N_2 = -mg + \frac{mv_2^2}{R} \geq 0$ (la normal no puede ser negativa porque significaria que el rulo "tira" del bloque en vez de empujarlo) entonces $v_2 \geq \sqrt{Rg}$, que llegue con dicha velocidad dependerá de con qué velocidad el bloque entra al rulo.

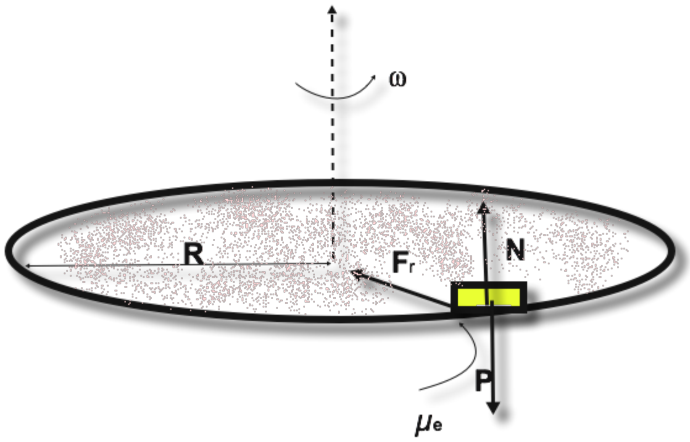
Si quisieramos hacer una evaluación cuantitativa de las velocidades en el punto medio y arriba, y así las normales correspondientes, tendriamos que plantear la segunda Ley de Newton para una posición cualquiera de la partícula en un dato tiempo t y resolver las ecuaciones diferenciales que nos quedan



$$
\begin{aligned}
-mgcos\theta(t) + N(t) &= mR\omega(t)^2 = mR\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 \\
(1)\ \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 + \frac{g}{R}cos\theta(t) - \frac{N(t)}{mR} &= 0 \\
-mgsen\theta(t) &= m\alpha(t)R = m\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}R \\
(2)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{R}sen\theta(t) &= 0
\end{aligned}
$$

que son en general muy complicadas porque deberiamos primero resolver (2) y luego meter $\theta(t)$para obtener la normal$N(t)$ en la (1) y velocidad tangencial $v(t) = R\frac{d\theta}{dt}$ en cualquier punto del recorrido. Más adelante resolveremos la (2) para pequeños ángulos θ cuando estudiemos el movimiento de un péndulo, pero por ahora nos quedamos con el análisis cualitativo qude hicimos arriba.

2)Un bloque de masa m se encuentra al borde sobre una superficie giratoria de radio R que tiene una velocidad angular constante ω , si el coeficiente de roce entre el bloque y la mesa es μ_e, cuál será la velocidad máxima que puede alcanzar la mesa para que el bloque no deslice?



Para que el bloque acompañe a la mesa con movimiento circular notemos que la única fuerza radial que aparece es la de roce, que no hay aceleración tangencial y que las fuerzas verticales son la normal y el peso, así se debe cumplir

$$\begin{aligned} ma_N &= F_r \leq \mu_e N \\ 0 &= N - mg \end{aligned}$$

ya que el cuerpo no se acelera verticalmente y por lo tanto

$$ma_N \quad = mR\omega^2 \quad \leq \mu_e mg \Rightarrow \omega \leq \sqrt{\mu_e g/R},$$

donde vemos que las unidades resultantes son $1/\mathit{tiempo}$ que es lo correcto.