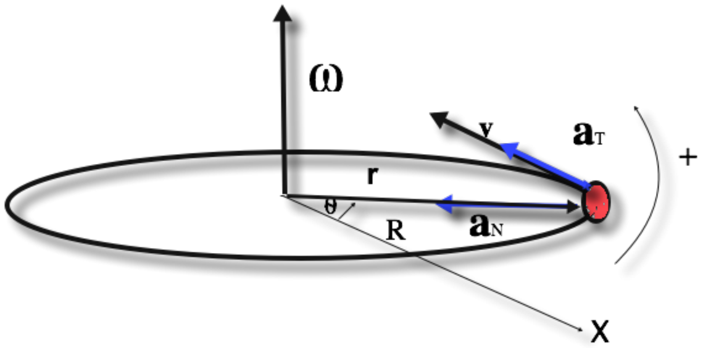
4 Movimiento circular

4.1 Cinemática

Ya hemos discutido como un ejemplo partícular de movimiento en el plano la cinemática del tiro oblicuo. Veamos ahora el movimiento circular. Dicho movimiento tiene como trayectoria una circunferencia de radio R y es conveniente usar como coordenada el ángulo que barre el vector posición respecto al eje X como muestra la figura, e iremos viendo que significa cada elemento mostrado allí



El vector posición puede escribirse como

$$\mathbf{r}(t) = R(cos\theta(t), sen\theta(t), 0), [\theta] = radianes$$

donde conviene medir por el momento el ángulo en radianes que es el número de veces que entra R en el arco de circunferencia S que corresponde a dicho ángulo $[\theta] = radianes = \frac{S}{R}$ que es adimensional por ser un cociente de longitudes. Es evidente la equivalencia $2\pi rad = 360^0 = 1$ vuelta o revolución pues el arco correspondiente a una circunferencia completa es $2\pi R$.

Podemos tomar sin perder generalidad el vector velocidad angular a lo largo del ejez z y el plano xy el de movimiento de la partícula, y además medir en ángulo en radianes lo que nos permite relacionar un arco de circunferencia $s(t)$ con el ángulo $\theta(t)$ mediante la relación $s(t) = R\theta(t)$. Luego uno puede cambiar las unidades a grados sexagesimales o revoluciones según el problema pero recordando que la relación existente entre velocidad ,velocidad angular y radio sólo se mantiene cuando medimos en radianes.

Si ahora calculamos la velocidad derivando el vector posición y la aceleración derivando el vecor velocidad debermos aplicar la derivada de una función compuesta $\frac{dsen\theta(t),cos\theta(t)}{dt} = cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}, -sen\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}$ y donde definimos la velocidad angular como el cambio del ángulo con el tiempo $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ asociandole un vector perpendicular al plano de rotación. Asi tendremos haciendo algunos cálculos intermedios donde usamos las derivadas mencionadas y la definición de producto vectorial para indicar que la velocidad(tangente a la trayectoria) es perpendicular tanto a $\boldsymbol{r}(t)$ y a $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\hat{k}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= (0, 0, \omega(t)), [\omega] = radianes/[t] \\
\mathbf{r}(t) &= R(cos\theta(t), sen\theta(t), 0), [\theta] = radianes \\
\mathbf{v}(t) &= \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t),\ |\mathbf{v}| = abs(\omega)R \\
\mathbf{a}(t) &= \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})}{dt^2} = \mathbf{a}_T(t) + \mathbf{a_N}(t)
\end{aligned}$$

donde uso *abs* para indicar el valor absoluto de cantidades escalares y |...| para el módulo de un vector por razones de claridad. Notemos que la aceleración tiene dos términos que provienen de derivar el porducto vectorial presente en la velocidad

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) \quad = \quad \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}(t)\right) \times \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \left(\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)\right)$$

Así vemos que calculando cada término en $d^2\mathbf{r}/dt^2$ se obtiene (notemos de la gráfica que $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r}$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_T(t) &= \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}(t)\right) \times \mathbf{r}(t) = \frac{\alpha(t)}{\omega(t)}\mathbf{v}(t),\ \mathbf{a}_N(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \left(\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)\right) = -\omega(t)^2\mathbf{r}(t) \\
|\mathbf{a}_T| &= abs\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)|\mathbf{v}| = abs(\alpha)R \\
|\mathbf{a}_N| &= R\omega^2
\end{aligned}$$

donde aparece la aceleración angular $\alpha(t) = d\omega(t)/dt = d^2\theta/dt^2$ y donde $\omega \neq 0$ pues si no fuera así no tendríamos movimiento circular. Algunas observaciones son importantes de mencionar:

- Midiendo el ángulo en radianes, el radio en metros y el tiempo en segundos la velocidad se medirá en m/seg y la aceleración en m/seg^2, la velocidad angular en $rad/seg \equiv 1/seg$ ya que el radián es el número de veces que entra el radio en el arco de circunferencia que subtiende un dado ángulo y es adimensional, y la aceleración angular en $1/seg^2$.

- El movimiento circular siempre es acelerado porque a pesar de que cuando $\alpha = 0(\omega = cte)$ y $\mathbf{a}_T = 0(|\mathbf{v}| = cte)$, como $\omega \neq 0$ siempre entonces $\mathbf{a}_N \neq 0$, y esta aceleración llamada usualmente centrípeta es la que obliga a la partícula a realizar un movimiento circular.

- Si bien la aceleración normal siempre apunta al centro de la circunferencia trayectoria, dependiendo de los signos relativos de α y ω la tangencial puede ser colineal u opuesta a la velocidad produciendo un movimiento tangencial acelerado o desacelerado.

Casos particulares

Asi como antes definimos el MRU ahora podriamos hablar de un movimiento circular uniforme MCU que se da cuando la velocidad angular $\omega = cte(\alpha = 0)$ y velocidad tangencial $v_T \equiv \pm|\mathbf{v}| = \omega R = cte$,($\pm$) dependiendo si nos movemos en sentido positivo (antihorario según nuestra convención) o negativo. Como por definición

$$\omega \quad = \quad \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t,\ \omega = cte$$

que pueden relacionarse inmediatamente con la velocidad tangencial obtendiendose $s = R\theta_0 + \omega Rt = s_0 + v_T t,\ v_T = \omega R = cte$. notemos la similitud con las ecuacines de MRU $v = cte,\ x = x_0 + vt$.

El otro caso particular interesante el el movimiento circular uniformemente acelerado o variado MCUV que se da cuando $\alpha = cte$ y de la definición obtendremos

$$\alpha \quad = \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t,\ \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,$$

nuevamente se puede hacer la conexión con la velocidad tangencial y el arco usando $v_T = \omega R,\ s = \theta R$.

Ejemplo

Un motor se encuentra girando a 2000 rev/min y al cortarle la alimentación eléctrica comienza a frenarse a razón de $-100\frac{rev}{minseg}$(disminuye 100 rev/min en cada segundo), determinar

a) Qué velocidad angular tendrá y cuantas vueltas dió al cabo de 10 segundos?

b) Cuanto tiempo tardará en detenerse?

c) Cual es el valor de la velocidad tangencial y la distancia recorrida en esos 10 segundos si el eje del motor mide $R = 0.1m$?

Si trabajamos solamente con la velocidad angular y el ángulo no tenemos que preocuparnos por pasar a radianes, ésto deberiamos hacerlo al final para calcular la velocidad tangencial. Recordemos que $2\pi rad = 1rev = 360^0$.

La velocidad angular y ángulo barrido en los primeros 10 seg serán

$$\begin{aligned}
\omega(10seg) &= 2000\frac{rev}{min} - 100\frac{rev}{min\,\cancel{seg}}10\cancel{seg} = 1000\frac{rev}{min} \\
\theta(10seg) &= 0 + 2000\frac{rev}{min = 60seg}10seg + \frac{1}{2}(-100\frac{rev}{(min = 60seg)seg})(10seg)^2 \\
&= 333.33rev - 83.33rev = 250rev = 90000^0 = 91570.8rad
\end{aligned}$$

Cuando se detenga deberá ser $\omega = 0$ asi tendremos

$$0 = 2000\frac{rev}{min} - 100\frac{rev}{min\,seg}t \Rightarrow t = \frac{2000}{100}seg = 20seg$$

Finalmente para determinar la velocidad tangencial y arco recorrido deberemos trabajar en rad/seg

$$\begin{aligned}
\omega(10seg) &= 1000\frac{2\pi}{min} = \frac{6280}{min} \Rightarrow v_T(10seg) = \omega(10seg)R = \frac{6280}{min} \times 0.1m = 628\frac{m}{min} \\
s(10seg) &= \theta(10seg)R = 91570.8 \times 0.1m = 9157.08m
\end{aligned}$$