2.3 Movimiento en dos dimensiones. Tiro oblícuo

Si despreciamos el roce con el aire y suponemos que la aceleración de la gravedad (la que produce la atracción terrestre) es constante (lo cual es cierto a alturas despreciables con el radio terrestre) la caida o lanzamiento hacia arriba de un cuerpo es un MRUV a lo largo del eje Y con $a_y(t) = -g = -9.8\frac{m}{seg^2}$, donde el signo negativo corresponde a que tomamos valores positivos hacia arriba. Por otro lado si además impulsamos horizontalmente al cuerpo con una velocidad inicial estaremos en presencia de un MRU a lo largo del eje X pues no hay aceleración horizontal. A la combinación de movimientos lo llamamos tiro oblícuo. Las ecuaciones serán

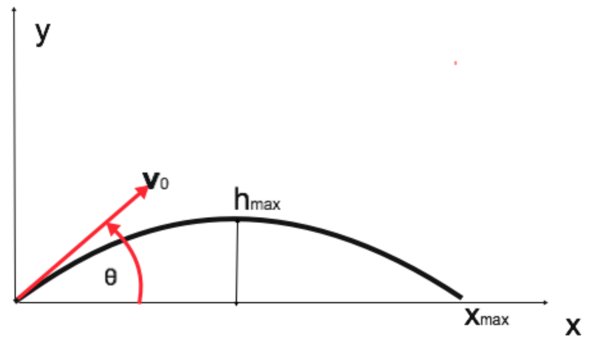
$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= (x_0 + v_{0x}t,\ y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2), g = 9.8\frac{m}{seg^2} \\ \mathbf{v}(t) &= (v_{0x},\ v_{0y} - gt), \\ \mathbf{a}(t) &= (0, -g) \end{aligned}$$

Hay algunos puntos notables a considerar en el tiro oblicuo. Uno es la altura máxima que se obtiene primeramente anulando la velocidad en y (ya que allí el cuerpo deja de ascender) , despejando el tiempo y luego reemplazando ese tiempo en $y(t)$ para obtenerla. El alcance que es el máximo valor de x alcanzado y para obtenerlo se despeja el tiempo anulando la altura (allí es donde el cuerpo toca el piso) y reemplazando en $x(t)$. Si qremos obtener la trayectoria debemos eliminar el tiempo entre $x(t)$ e $y(t)$ para obtener $y = f(x)$ que termina siendo una parábola.

Existe otro movimiento bidimensional importante que es el movimiento circular y analizaremos más adelante.

2.3.1 Puntos notables en el tiro oblícuo

Ahora buscaremos los elementos mencionados del movimiento de una partícula en un tiro oblicuo. Estos son la altura máxima alcanzada, el alcance y la ecuación de la trayectoria. Veamos un esquema del movimiento (lo mostrado es para $y_0 = x_0 = 0$)



La altura máxima es el punto más alto que alcanza el proyectil, y puede determinarse haciendo $v_y(t) = 0$ pues allí el proyectil,no asciende más. De dicha ecuación puede determinarse el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima y luego metiendo ese tiempo en $y(t)$ obtenemos la altura máxima

$$v_y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0y} - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_{0y}}{g}$$

$$h_{max} = y(\frac{v_{0y}}{g}) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} = y_0 + \frac{\mathrm{v}_0^2 sen^2\theta}{2g}.$$

El alcance es el punto más lejano alcanzado por el proyectil cuaando vuelve a tocar el piso, y se obtiene haciendo $y(t) = 0$ (suponiendo que no tenemos un acantilado)

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 \Rightarrow y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \\ t &= \frac{v_{0y}}{g} \pm \frac{\sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g} \\ x_{max} &= x(\frac{v_{0y}}{g} + \frac{\sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g}) \\ &= x_0 + v_{0x}(\frac{v_{0y}}{g} + \frac{\sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g}), \end{aligned}$$

donde la solución que debe tomarse es la del signo $+$ pues la otra corresponde al punto de partida. Donde para el caso particular $x_0 = y_0 = 0$

$$x_{max} = \frac{2\mathrm{v}_0^2 sen\theta cos\theta}{g}.$$

Ademas si expresamos las componentes de la velocidad inicial en términos del módulo de la velocidad y el ángulo, tendremos una dependencia del alcance con estos. Finalmente para obtener la trayectoria despejamos el tiempo de $x(t)$ y lo reemplazamos en $y(t)$

$$\begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{\mathrm{v}_0 cos\theta} \\ y(x) &= y(\frac{x - x_0}{\mathrm{v}_0 cos\theta}), \end{aligned}$$

que al ser cuadrática será una parábola

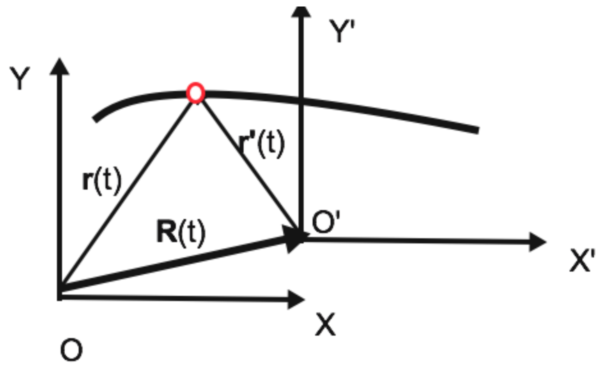
$$y(x) = y_0 + v_{0y}\left(\frac{x - x_0}{\mathrm{v}_0 cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{\mathrm{v}_0 cos\theta}\right)^2,$$

si suponemos por simplicidad $x_0 = y_0 = 0$

$$\begin{aligned} y(x) &= v_{0y}\frac{x}{\mathrm{v}_0 cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\mathrm{v}_0 cos\theta}\right)^2, \\ &= -\frac{1}{2}g\left(\left(\frac{x}{\mathrm{v}_0 cos\theta}\right)^2 - 2\frac{v_{0y}}{g}\frac{x}{\mathrm{v}_0 cos\theta} + \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\mathrm{v}_0 cos\theta} - \frac{v_{0y}}{g}\right)^2 + \frac{v_{0y}^2}{2g} \\ &= -\frac{g}{2\mathrm{v}_0^2 cos^2\theta}\left(x - \frac{\mathrm{v}_0^2 sen\theta cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{\mathrm{v}_0^2 \mathrm{sen}^2\theta}{2\mathrm{g}} \\ &= -\frac{g}{2\mathrm{v}_0^2 cos^2\theta}\left(x - \frac{x_{max}}{2}\right)^2 + h_{max}. \end{aligned}$$

2.4 Movimiento relativo

Es importante poder conectar las observaciones sobre el movimiento de una partícula entre dos sistemas de referencia diferentes uno moviendose relativamente respecto del otro.



Los vectores de posición y el vector relativo que conecta O con O' se relacionan como

$$\boldsymbol{r}(t) \;=\; \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{R}(t),$$

donde notamos que el tiempo es el mísmo en ambos sistemas de referencia. Si queremos relacionar la velocidad y la aceleración derivamos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{V}(t), \\ \boldsymbol{a}(t) &= \boldsymbol{a}'(t) + \boldsymbol{A}(t). \end{aligned}$$

Normalmente estudiaremos el caso en que $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{V}.t$ es decir la velocidad entre sistemas es constante independiente del tiempo y donde los orígenes coinciden en $t = 0$. Este caso corresponderá a la transformación entre sistema inerciales que discutiremos en dinámica y las transformaciones corresponden a las llamadas transformaciones de Galileo

$$\boldsymbol{r}(t) \;=\; \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{V}.t,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{V}, \\ \boldsymbol{a}(t) &= \boldsymbol{a}'(t). \end{aligned}$$

Existe el principo de relatividad que nos dice que las leyes físicas son las mísmas en todos lo sistemas de referencia inerciales e invariantes frente a las transformaciones de Galileo que los conectan.

2.4.1 Ejemplo

Una persona que viaja en un tren con velocidad $V = 60\frac{km}{h}$arroja una pelota con velocidad $v' = -5\frac{km}{h}$ en sentido contrario al movimiento del tren , con qué velocidad v ve una persona en el andén moverse a la pelota?

Si consideramos dos sistemas de referencia, uno en el tren y otro en el andén tendremos

$$v \;=\; -5\frac{km}{h} + 60\frac{km}{h} = 55\frac{km}{h},$$

esta sería la velocidad relativa de la pelota respecto al andén.