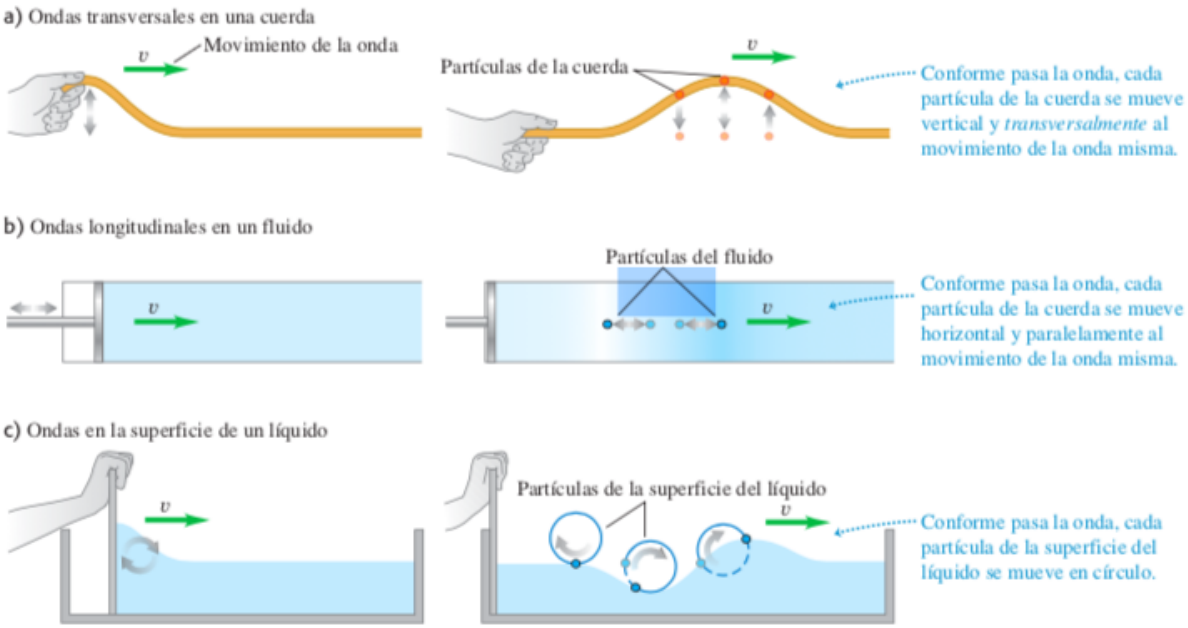
10 Ondas

Ya hemos estudiado anteriormente el movimiento oscilatorio armónico simple donde una partícula unida a un resorte describia una movimiento para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio, cuya coordenada estaba dada por $x(t) = Acos(\omega t + \delta)$ donde A era la amplitud del movimiento y ω estaba relacionada con las propiedades del resorte y el valor de la masa de la partícula. Para pequeños apartamientos el resorte volvia a su posición de equilibrio si producirse en él deformaciones permanentes y deciamos que estabamos en su régimen elástico. La elasticidad o propiedad que tiene un cuerpo o sistema de partículas de ser deformado y regresar luego a su forma original es algo que se presenta tanto sólidos, liquidos y gases. Un podría pensar una forma muy simplificada que los átomos y moléculas están unidos por pequeños resortes. Un efecto importante de la elásticidad de un medio es la generación de ondas mecánicas.

Una onda es una deformación producidad en un punto de un medio y que como las partículas de ese medio están conectadas entre si, se va transmitiendo a todo el medio viajando a una cierta velocidad que depende del tipo de medio y de las condiciones (tensiones, presiones, etc) a las que está sometido el medio. Ejemplos son las ondas que se producen en una cuerda cuando esta se agita verticalmente, uno ve que el moviminero generado en un extremo se transmite a toda la cuerda, o el sonido ya que uno habla en un punto y alguien te escucha en otro. Tambien tenemos las ondas que se producen cuando cae una piedra en un estanque o las olas del mar. Un aspecto importante de una onda es que esta no transporta materia porque las partículas del medio se encuentran oscilando alrededor de una posición de equilibrio, sino energía. Un terremoto es una onda mecánica que se genera en algún punto interior de la tierra y luego la energía que transportaba se libera rompiendo la corteza terrestre.

10.1 Tipos de ondas y descripción

Existen ondas transversales, donde las partículas oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda (cuerda), longitudinales donde las partículas oscilan en la mísma dirección de propagación (sonido) o combinación de ambas (olas).



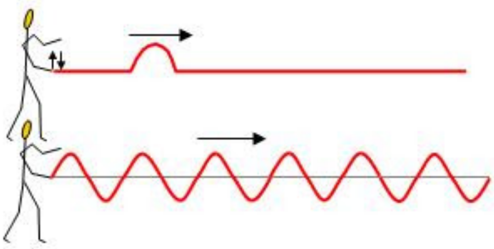
La expresión matemática de una onda que se propaga a lo largo del eje x debe ser mediante una función de dos variables

$$y(x,t) = f(x \mp vt)$$

correspondiendo el signo - a una onda que viaja hacia la derecha y el + hacia la izquierda, pues tendremos

$$y(x \pm v\Delta t, t+\Delta t) = f(x \pm v\Delta t \mp v(t+\Delta t)) = f(x \mp vt) = y(x,t)$$

o sea que la onda tendrá el mísmo valor en un tiempo posterior $t+\Delta t$ en un punto $x+v\Delta t$ ó $x-v\Delta t$ si viaja a derecha o izquierda respectivamente del valor que tenía en x,t . Usemos el ejemplo de la cuerda por el momento y supongamos que es muy larga para no precuparnos por ahora en que pasa cuando la onda llega al otro extremo. Podriamos generar un pulso que es una onda aislada que viaja si agitamos una sola vez nuestra cuerda o un tren de ondas si agitamos el extremos de la cuerda con una frecuencia f que es el número de veces de ir y volver al mísmo punto en un segundo y que se relaciona con el tiempo que lleva una oscilación llamado perido T como $f=\frac{1}{T}$.



a forma de un pulso o de una onda en el tren es arbitraria. La función matemática que describa un tren de ondas debe ser además periódica pues el valor de la deformación por ejemplo en un punto fijo x en t debe repetirse en $t+T$ o sea

$$f(x,t) = f(x,t+T)$$

lo cual combinado con la forma general de la onda

$$y(x \pm vT, t) = f(x,t-T) = f(x,t) = y(x,t)$$

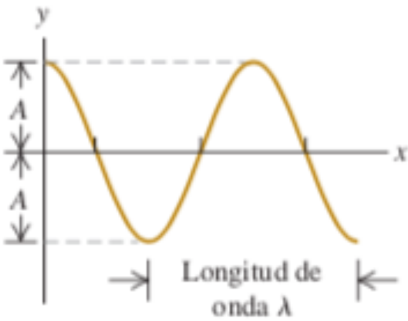
o sea que tambien hay una periodicidad espacial que veriamos si sacamos una instantánea a la onda en el tiempo t es decir la onda repite su forma despues de una distancia $\lambda = vT$ que se denomina longitud de onda. En resumen tendremos una periodicidad temporal con periodo T y una espacial con periodo λ

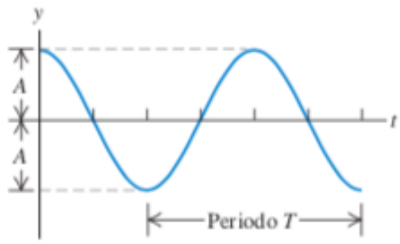
$$\begin{aligned} y(x,t) &= y(x,t+T) \\ y(x,t) &= y(x+\lambda,t) \\ \lambda &= vT = \frac{v}{f} \end{aligned}$$

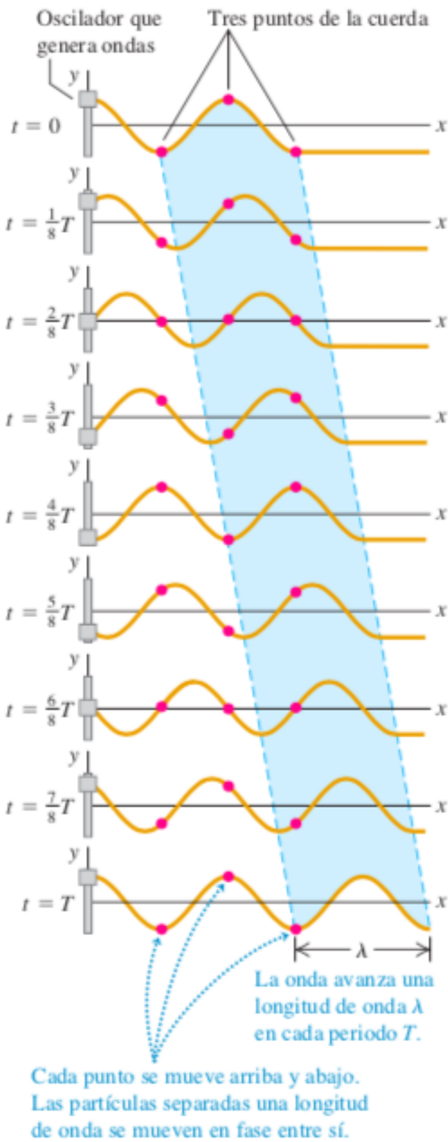
Un caso particular e importante de forma de onda es la onda sinusoidal donde se usan funciones seno o coseno para describirla

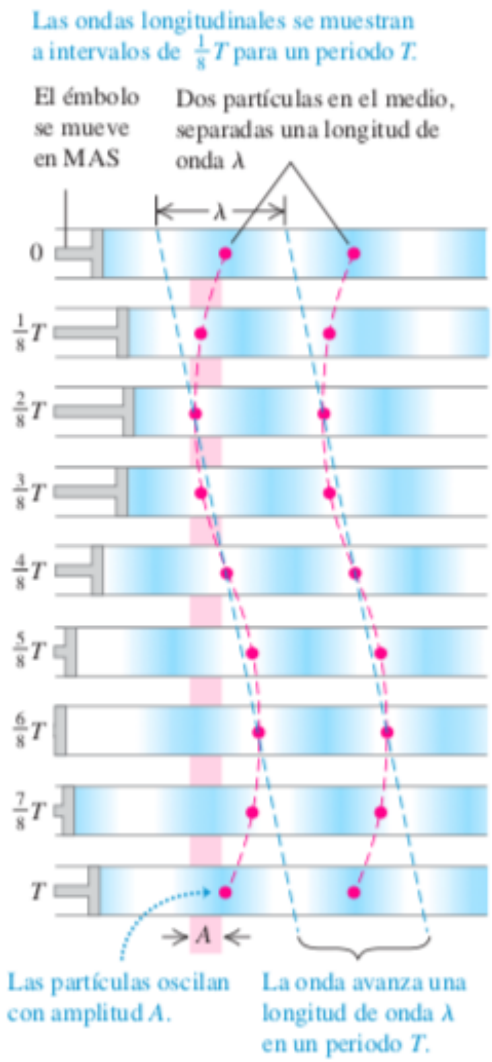
$$y(x,t) = Asen(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t)$$

notemos que segun la ecuación anterior si hacemos $x \to x + \lambda$ o $t \to t + T$ el argumento de la función seno se incrementa o disminuye en 2π y al ser una función periódica con dicho periodo su valor no cambia. Usualmente se define el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y la frecuancia angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En la siguiente figuras podemos esquematizar lo visto









Para el caso de una onda longitudinal en un fluido compresible como lo es el aire tendremos que $y(x,t)$ es el desplazamiento longitudinal de las partículas y este puede conectarse con la presión obteniendose una onda de presión

$$p(x) = \frac{2\pi}{\lambda} BAsen(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t)$$

donde $B = \frac{\Delta p}{\Delta V/V}$ es el módulo de compresibilidad del fluido que depende de la temperatura, y es lo que se comprime el fluido frente a una cambio de presión Δp por unidad de cambio relativo $\Delta V/V$ de volúmen.

Ejemplo:

Determinar la velocidad de propagación y amplitud de la onda $y(x,t) = 0.1m \times sen((2m)^{-1}x - (4seg)^{-1}t)$. Tendremos que la amplitud será $A = 0.1m$, la longitud de onda $\lambda = 4\pi m = 12.56m, T = 8\pi = 25.13seg$ y asi $v = \frac{\lambda}{T} = 0.5m/seg$.

10.2 Ecuación de onda

De la función de onda podemos obtener una expresión para la velocidad transversal y aceleración transversal de cualquier partícula en una onda transversal, que llamaremos respectivamente $a_y(x,t), v_y(x,t)$ para distinguirla de la rapidez de propagación de la onda,v. Para calcular v_y, a_y en un punto x dado, derivamos la función de onda$y(x,t)$ con respecto a t, manteniendo x constante. Si la función de onda es

$$\begin{aligned} y(x,t) &= Acos(kx-\omega t) \\ v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} &= -A\omega sen(kx-\omega t) \\ a(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega^2 cos(kx-\omega t) = -\omega^2 y(x,t), \end{aligned}$$

donde vemos que la aceleración que sería proporcional a la fuerza es de caracter restitutivo y lineal con el desplazamiento como en el movimiento oscilatorio armónico. De aqui podemos intuir el carácter elástico del medio donde se propagan las ondas, elasticidad ya presente en el resorte que hemos estudiado. Notemos que con el simbolo ∂ estamos indicando las derivadas parciales que se realizan sobre alguna de la variables x, t manteniendo la otra fija. Tambien podemos estudiar la variación espacial de una onda usando la pendiente de la recta tangente al perfil de la onda en un tiempo dado y su concavidad. Aqui usaremos las derivadas parciales primera y segunda respecto a la variable x

$$\begin{aligned} m(x,t) &= \frac{\partial y}{\partial x} = -Aksen(kx-\omega t) \\ c(x,t) &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 cos(kx-\omega t) = -k^2 y(x,t), \end{aligned}$$

donde vemos que cuando $y(x,t) > 0 \Rightarrow c(x,t) < 0$ y es concava hacia abajo, mientras que cuando se cumple que $y(x,t) < 0 \Rightarrow c(x,t) > 0$ como corresponde a un perfil de un coseno. Notemos que usando la relación antes obtenida $\lambda = vT \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{v}\frac{2\pi}{T} \Rightarrow k = \frac{1}{v}\omega$, entonces combinando las derivadas segundas antes obtenidas

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x,t) = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

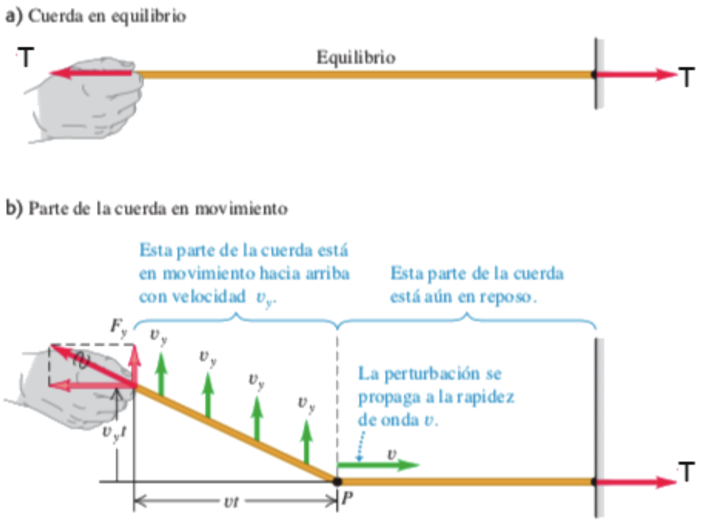
de donde finalmente obtenemos la llamada ecuación de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

La ecuación anterior es una de las más importantes en física. Siempre que ocurre, sabemos que una perturbación puede propagarse como onda a lo largo del eje x con rapidez v. La perturbación no tiene que ser una onda senoidal; puede verse que cualquier onda en una cuerda obedece dicha, sea periódica o no, o sea cualquier onda de la forma $y(x,t) = f(x \mp vt)$ satisface dicha ecuación de ondas.

10.3 Velocidad de propagación

Ahora queremos calcular la velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda de densidad lineal $\mu = M/L$ donde Mes la masa de la cuerda y L su longitud que hemos supuesto grande. Siempre debemos diferenciar la velocidad con que se mueven las partículas $v_y = \partial y(t)/\partial t$ con la velocidad de propagación v. Asi si usamos la 2da ley de Newton en la versión impulso igual variación de la cantidad de movimiento tendremos para la componente y



$$F_y t = m(v_y - 0)$$

para la componente x tenemos siempre una fuerza constante que es la tensión T de que manera que la fuerza neta en el extremos izquierdo es $(-T, F_y)$. De la figura puede verse por semejanza de triángulos

$$\begin{aligned} \frac{F_y}{T} &= \frac{v_y t}{vt} \Rightarrow F_y = T\frac{v_y}{v} \\ F_y t &= T\frac{v_y}{v}t \end{aligned}$$

la masa es $m = \mu v t$ porque μ es la densidad por unidad de longitud y m la masa aproximada del segmento de cuerda puesto en movimiento (suponemos pequeños apartamientos) y finalmente poniendo el impulso y la variación de la cantidad de movimieto en la primera ecuación tendremos

$$\begin{aligned} T\frac{v_y}{v}t &= \mu v t v_y \\ &\Downarrow \\ v &= \sqrt{\frac{T}{\mu}} \end{aligned}$$

donde vemos que la velocidasd de propagación depende de la tensión y la densidad lineal. La ecuación anterior da la rapidez de la onda únicamente para el caso especial de las ondas mecánicas en un hilo o una cuerda estirados. Curiosamente, para muchos tipos de ondas mecánicas, incluidas las ondas en una cuerda, la expresión para la rapidez de la onda tiene la misma forma general

$$v = \sqrt{\frac{Fuerza\, de\, restitución\, que\, vuelve\, el sistema\, al\, equilibrio}{Inercia\, que\, resiste\, el\, retorno\, al\, equilibrio}}$$

Para interpretar esta expresión, examinemos una vez más el caso de ondas en una cuerda. La tensión T en la cuerda desempeña el papel de la fuerza de restitución; tiende a hacer que la cuerda vuelva a su configuración de equilibrio, no perturbada. La masa de la cuerda o, mejor dicho, la densidad lineal de masa μ proporciona la inercia que evita que la cuerda regrese instantáneamente al equilibrio. Por lo tanto, tenemos $v = \sqrt{T/\mu}$ para la rapidez de ondas en una cuerda. Más adelante veremos una expresión similar para la rapidez de las ondas sonoras en un gas. A grandes rasgos, la presión del gas proporciona la fuerza que tiende a volver al gas a su estado no perturbado después de que una onda sonora pasa por él. La inercia proviene de la densidad, o masa por unidad de volumen, del gas.

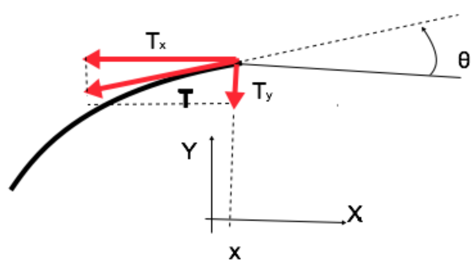
10.4 Energía del movimiento ondulatorio

Todo movimiento ondulatorio tiene energía asociada a él. La energía que recibimos del Sol y los efectos destructivos del oleaje y los terremotos lo atestiguan. Para producir cualesquiera de los movimientos ondulatorios que hemos visto en este capítulo, necesitamos aplicar una fuerza a una porción del medio de la onda; el punto de aplicación se mueve, así que efectuamos trabajo sobre el sistema. Al propagarse la onda, cada porción del medio ejerce una fuerza y realiza trabajo sobre la porción adyacente. De este modo, una onda puede transportar energía de una región del espacio a otra. Como ejemplo de las consideraciones de energía en el movimiento ondulatorio, examinemos otra vez las ondas transversales en una cuerda. ¿Cómo se transfiere energía de una porción de la cuerda a otra?

Recordemos el concepto de potencia, que es el trabajo realizado por unidad de tiempo, es decir la rapidez con que se transfiere energía o se absorbe energía del sistema. Por ejemplo para en caso de una partícula que realiza un desplazamiento entre x y $x + dx$ y actua sobre ella una fuerza $\boldsymbol{F}(x)$, ésta realizará un trabajo en la unidad de tiempo

$$\begin{aligned} dW &= F_x(x)dx = F_x(x(t))\frac{dx}{dt}dt = F_x(x(t))v(t)dt \\ P(t) = \frac{dW}{dt} &= F_x(x(t))v(t). \end{aligned}$$

Ahora translademos este concepto al caso de una pequeña porción de cuerda por la cual se propaga una onda, donde los desplazamientos son transversales a lo largo del eje y. La potencia P (rapidez con que se hace trabajo) en el punto x de la cuerda es la fuerza transversal $F_y(x,t)$ por la velocidad transversal $v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ de ese punto



$$P(x,t) = T_y(x,t)v_y(x,t) = T_x(-)tan\theta(x,t)v_y(x,t) \approx T(-\frac{\partial y}{\partial x})\frac{\partial y}{\partial t}$$

donde hemos aproximado $T \approx T_x$ pues suponemos deformaciones elásticas pequeñnas.

Esta potencia es la razón instantánea con que se transfiere energía por la cuerda; su valor depende de la posición x en la cuerda y del tiempo t. Sólo se transfiere energía en los puntos en que la cuerda tiene pendiente distinta de cero ($\frac{\partial y}{\partial x}$), de modo que hay una componente transversal de la tensión, y en los que la cuerda tiene velocidad transversal distinta de cero ($\frac{\partial y}{\partial t}$), de modo que la fuerza transversal puede efectuar trabajo.

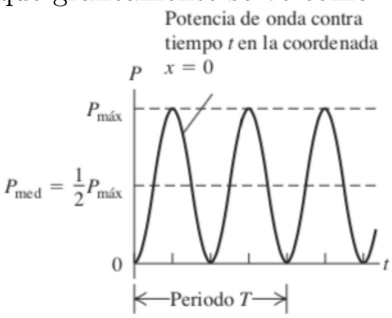
La ecuación es válida para cualquier onda en una cuerda, sea senoidal o no. Para una onda senoidal con función de onda dada por la ecuación $y(x,t) = Acos(kx - \omega t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= \omega Asen(kx - \omega t) \\
\frac{\partial y}{\partial x} &= -kAsen(kx - \omega t) \\
P(x,t) &= TA^2\omega ksen^2(kx - \omega t) \\
P(x,t) &= \sqrt{T/\mu}A^2sen^2(kx - \omega t),
\end{aligned}$$

donde hemos usado la expresión de la velocidad de propagación $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \omega k$. Tendremos entonces que la energía que se transporta energía por la cuerda en la unidad de tiempo es

$$\boxed{P(x,t) = \sqrt{T/\mu}A^2sen^2(kx - \omega t).}$$

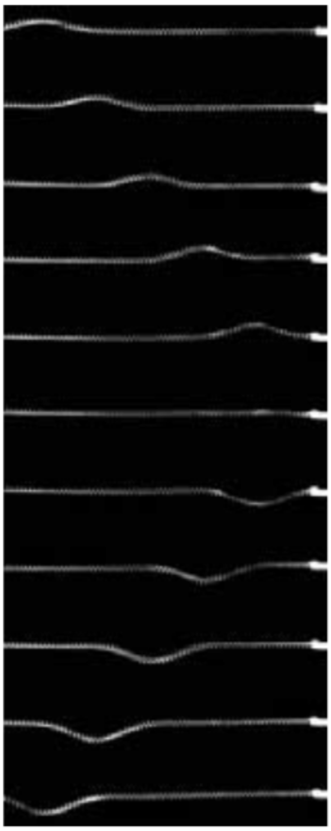
que graficamente se ve como



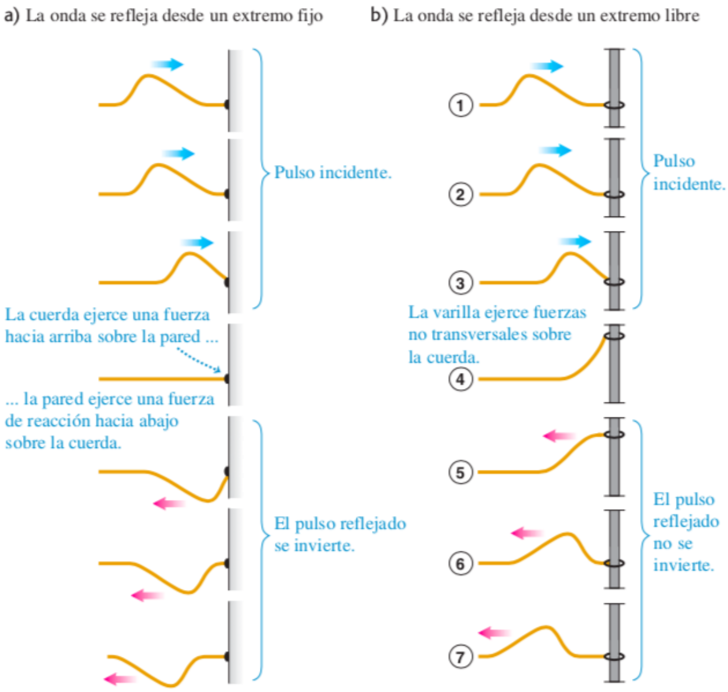
10.5 Superposición de ondas

Hasta aquí, hemos hablado de ondas que se propagan continuamente en la misma dirección. Sin embargo, cuando una onda choca contra las fronteras de su medio, se refleja parcial o totalmente. Si gritamos hacia la pared de un edificio o hacia un acantilado que está a cierta distancia, la onda sonora se refleja en la superficie rígida, y escuchamos un eco. Si sacudimos el extremo de una cuerda cuyo otro extremo está atado a un soporte rígido, una pulsación viajará a lo largo de la cuerda y se reflejará hacia nosotros. En ambos casos, la onda inicial y la reflejada se traslapan en la misma región del medio. Este traslape de ondas se denomina interferencia. (En general, el término “interferencia” se refiere a lo que sucede cuando dos o más ondas pasan por la misma región al mismo tiempo.)

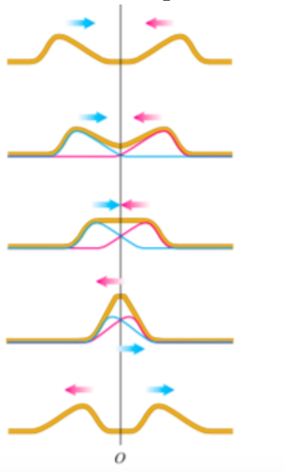
Como ejemplo sencillo de reflexión de ondas y el papel de la frontera de un medio de onda, veamos otra vez las ondas transversales en una cuerda estirada. ¿Qué sucede cuando un pulso de onda o una onda senoidal llega al extremo de la cuerda? Si el extremo está sujeto a un soporte rígido, es un extremo fijo que no puede moverse. La onda incidente ejerce una fuerza sobre el soporte; la reacción a esta fuerza, ejercida por el soporte sobre la cuerda, "rebota" sobre la cuerda y crea una pulsación u onda reflejada que viaja en la dirección opuesta. La figura siguiente es una serie de fotografías que muestran la reflexión de un pulso en el extremo fijo de un resorte espiral largo.



El pulso reflejado se mueve en la dirección opuesta a la del pulso inicial, o inci- dente, y su desplazamiento también es opuesto. Esta situación se ilustra para un pulso ondulatorio en una cuerda en la figura que sigue



Cuando dos ondas se cruzan en una región del eje x la onda resultante se obtiene aplicando el principio de superposición que nos dice que el desplazmiento resultante es la suma de los individuales. Veamoslo en ondas transversales con expresiones $y_1(x,t), y_2(x,t)$ y tendremos $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$



Cuando se suman ondas armónicas de igual amplitud podemos usar para realizar la suma las siguientes expresiones

$$sen(A) + sen(B) = 2sen\,.\frac{A+B}{2}.\cos.\frac{A-B}{2}$$

$$sen(A) - sen(B) = 2cos\,.\frac{A-B}{2}.\mathrm{sen}\,.\frac{A+B}{2}$$

$$cos(A) + cos(B) = 2cos\,.\frac{A+B}{2}.\cos.\frac{A-B}{2}$$

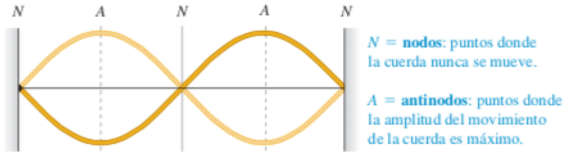
$$cos(A) - cos(B) = -2sen\,.\frac{A+B}{2}.\mathrm{sen}\,.\frac{A-B}{2}$$

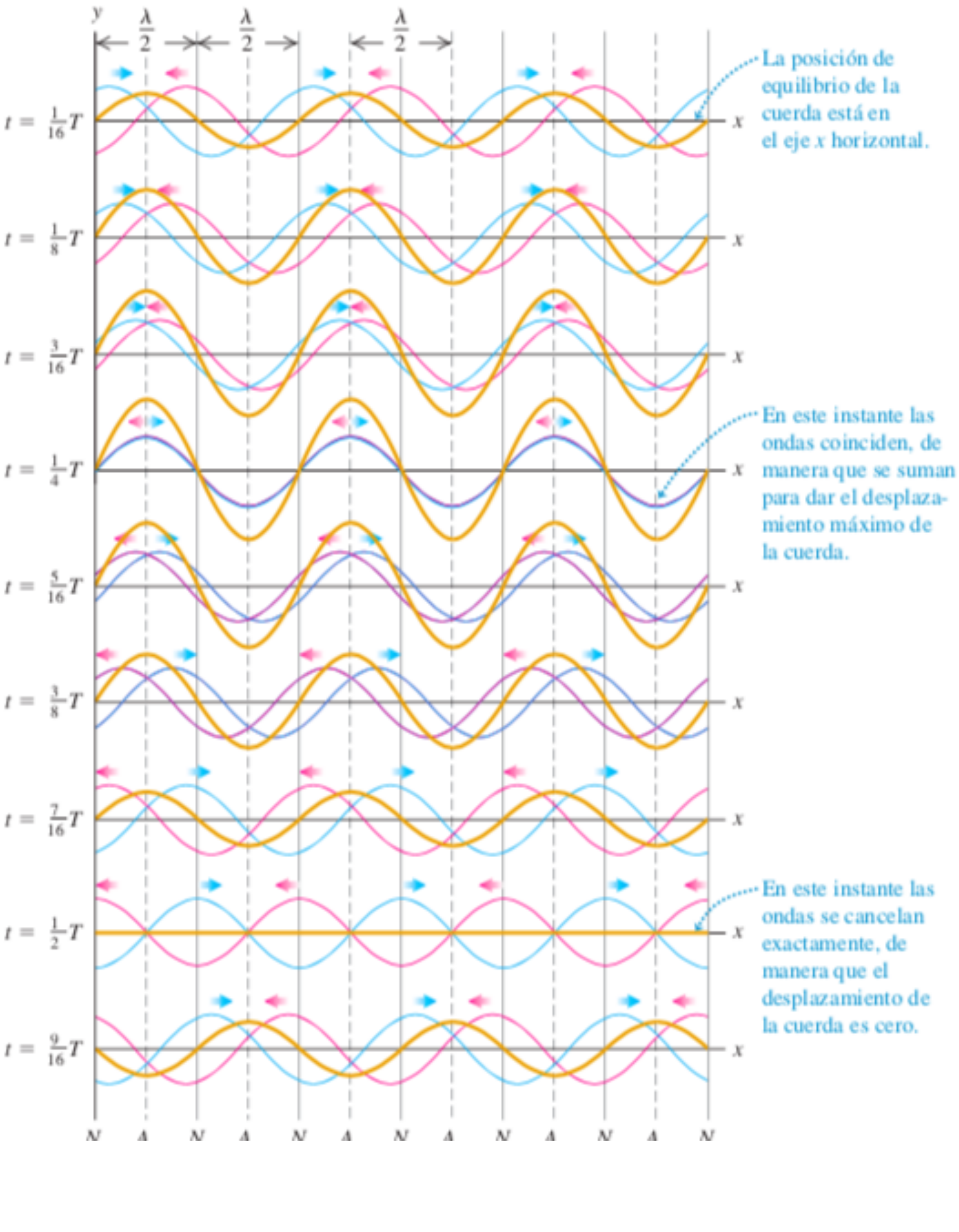
Por ejemplo si tenemos dos ondas de igual frecuencia o periodo moviendose en sentido contrario obtendriamos

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \quad sen(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t) \\ y_2(x,t) &= A \quad sen(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{T}t) \\ y(x,t) &= \quad 2Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned}$$

y obtenemos una llamada onda estacionaria donde la parte dependiente de x y t se factorizan.

La ecuación anterior tiene dos factores: una función de x y una de t. El factor $2Asenkx$ indica que, en cada instante, la forma de la cuerda es una curva senoidal. No obstante, a diferencia de una onda que viaja por una cuerda, la forma de la onda permanece en la misma posición, oscilando verticalmente según el factor $sen\omega t$. Este comportamiento se muestra gráficamente con las curvas marrón de la figura siguiente. Todos los puntos de la cuerda están en movimiento armónico simple, pero todos los que están entre cualquier par sucesivo de nodos oscilan en fase. Esto contrasta con las diferencias de fase entre oscilaciones de puntos adyacentes, que vemos en las ondas que viajan en una dirección


N A N A N
N = **nodos**: puntos donde la cuerda nunca se mueve.
A = **antinodos**: puntos donde la amplitud del movimiento de la cuerda es máximo.


y
$\frac{\lambda}{2}$ $\frac{\lambda}{2}$ $\frac{\lambda}{2}$
$t = \frac{1}{16}T$
$t = \frac{1}{8}T$
$t = \frac{3}{16}T$
$t = \frac{1}{4}T$
$t = \frac{5}{16}T$
$t = \frac{3}{8}T$
$t = \frac{7}{16}T$
$t = \frac{1}{2}T$
$t = \frac{9}{16}T$
x
N A N A N A N A N A N A N
La posición de equilibrio de la cuerda está en el eje x horizontal.
En este instante las ondas coinciden, de manera que se suman para dar el desplazamiento máximo de la cuerda.
En este instante las ondas se cancelan exactamente, de manera que el desplazamiento de la cuerda es cero.

El principio de superposición explica cómo la onda incidente y la reflejada se combinan para formar una onda estacionaria. En la figura anterior, las rosadas rojas indican una onda que viaja a la izquierda. La curvas azules muestran una onda que viaja a la derecha con la misma rapidez de propagación, longitud de onda y amplitud. Las ondas se muestran en nueve instantes, separados por un de periodo. En cada punto de la cuerda, sumamos los desplazamientos (valores de y) para las dos ondas individuales; el resultado es la onda total en la cuerda, dibujada en color marrón.

En ciertos instantes, como $t = T/4$ los dos patrones de onda están exactamente en fase entre sí, y la forma de la cuerda es una curva senoidal con el doble de amplitud que las ondas individuales. En otros instantes, como $t = T/2$ las dos ondas están totalmente desfasadas y la onda total en ese instante es cero. El desplazamiento resultante siempre es cero en los lugares marcados con N en la base de la figura. Éstos son los nodos. En un nodo, los desplazamientos de las dos ondas en rojo y azul siempre son iguales y opuestos, y se cancelan. Esta cancelación se llama interferencia destructiva. A la mitad del camino entre los nodos están los puntos de máxima amplitud o antinodos, marcados con A. En los antinodos, los desplazamientos de las dos ondas en rojo y azul siempre son idénticos, dando un desplazamiento resultante grande; este fenómeno se llama interferencia constructiva. Podemos ver que la distancia entre nodos o antinodos sucesivos es media longitud de onda, $\lambda/2$.

Podemos usar la ecuación de la onda estacionaria para determinar las posiciones de los nodos; éstos son los puntos en los que sen $kx = 0$, de modo que el desplazamiento siempre es cero. Esto sucede cuando$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, es decir, usando$k = 2\pi/\lambda$, (nodos de una onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en $x = 0$) . En particular, hay un nodo en$x = 0$, como debería ser, ya que este punto es un extremo fijo de la cuerda. A diferencia de una onda viajera, una onda estacionaria no transfiere energía de un extremo al otro. Las dos ondas que la forman transportarían individualmente cantidades iguales de potencia en direcciones opuestas. Hay un flujo local de energía de cada nodo a los antinodos adyacentes, y de regreso; pero la razón media de transferencia de energía es cero en todos los puntos. Si evaluamos

$$P(x,t) \;=\; \tfrac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} T\left(-\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial t},$$

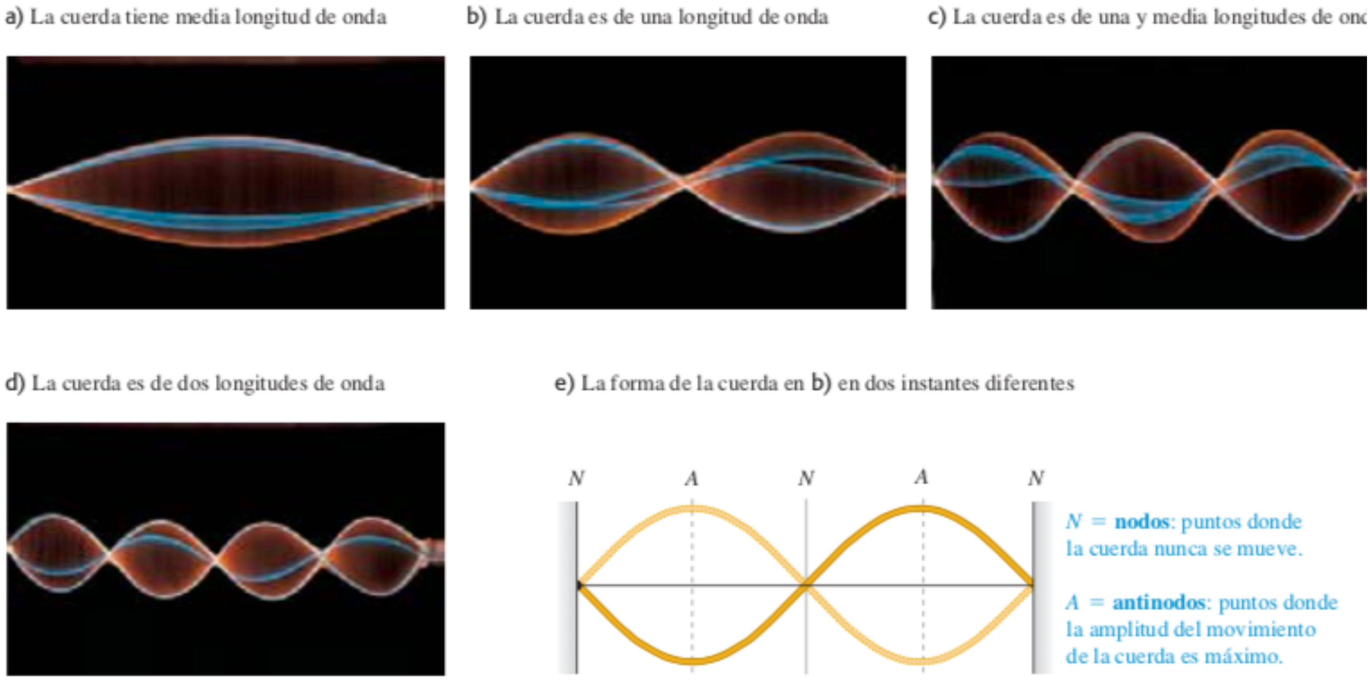
para el caso particular de una onda estacionaria daría cero.

10.6 Modos normales de una cuerda

Hemos descrito ondas estacionarias en una cuerda sujeta rígidamente por un extremo. No supusimos nada acerca de la longitud de la cuerda ni de lo que sucedía en el otro extremo. Consideremos ahora una cuerda de longitud definida L, sujeta rígidamente en ambos extremos. Tales cuerdas se encuentran en muchos instrumentos musicales, como pianos, violines y guitarras. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, se produce una onda en ella; esta onda se refleja una y otra vez en los extremos de la cuerda, formando una onda estacionaria. Ésta, a la vez, produce una onda sonora en el aire, cuya frecuencia está determinada por las propiedades de la cuerda. Esto es lo que hace a los instrumentos de cuerda tan útiles para producir música. Para entender estas propiedades de las ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos, veamos primero lo que sucede cuando establecemos una onda senoidal en una cuerda así. La onda estacionaria que resulta debe tener un nodo en ambos extremos de la cuerda. En la sección anterior, vimos que dos nodos adyacentes están separados media longitud de onda $\lambda/2$, así que la longitud de la cuerda debe ser $\lambda/2$, o $2\lambda/2$, o $3\lambda/2$ o, en general, un número entero de medias longitudes de onda:

$$L \;=\; n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Esto es, si una cuerda de longitud L está fija en ambos extremos, sólo puede existir una onda estacionaria si su longitud de onda satisface dicha ecuación,



A la serie de posibles longitudes de onda estacionaria le corresponde una serie de posibles frecuencias de onda estacionaria f_n, cada una relacionada con su longitud de onda correspondiente por $f_n = v/\lambda_n$, la frecuencia más pequeña f_1 corresponde a la longitud de onda más grande (el caso n $=$ 1), $\lambda_1 = 2L, f_1 = v/2L$.Esta se llama frecuencia fundamental. Las otras frecuencias de onda estacionaria son $f_n = nf_1$.mEstas frecuencias se llaman armónicos, y la serie es una serie armónica. Algunos músicos llaman a f_2, f_3, etcétera, sobretonos. La función que corresponde a la onda sería

$$y(x,t) \quad = \quad = 2Asen(knx)sen(\omega nt),$$

y se denominan modos normales en una cuerda.

Si pudiéramos desplazar una cuerda de modo que su forma tuviera la de uno de los patrones de modo normal, y luego soltarla, vibraría con la frecuencia de ese modo. Tal cuerda vibrante desplazaría el aire circundante con la misma frecuencia, produciendo una onda sonora senoidal viajera que nuestro oído percibiría como un tono puro. Sin embargo, cuando una cuerda se golpea (como en un piano) o pulsa (como en una guitarra), la forma de la cuerda desplazada no es tan sencilla como uno de los patrones de los modos normales. En la vibración resultante están presentes la frecuencia fundamental y muchos sobretonos. Por lo tanto, ese movimiento es una combinación o superposición de muchos modos normales. Varios movimientos armónicos simples de diferentes frecuencias están presentes simultáneamente, y el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda es la suma (o superposición) de los desplazamientos asociados a los modos individuales. El sonido producido por la cuerda vibrante es igualmente una superposición de ondas sonoras senoidales viajeras, que percibimos como un tono rico y complejo con la frecuencia fundamental f_1.

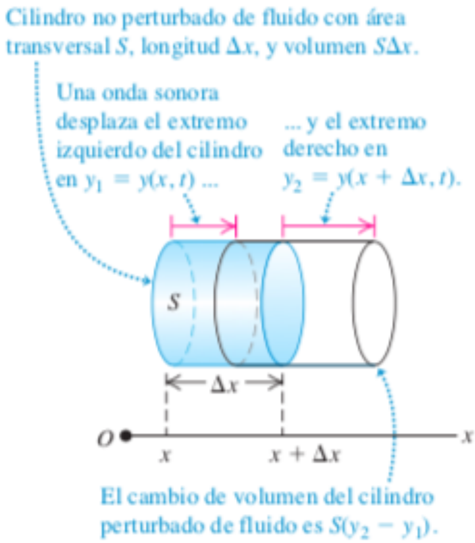
10.7 Ondas sonoras

La definición más general del sonido es una onda longitudinal en un medio. Lo que más nos interesa son las ondas sonoras en aire; aunque el sonido puede viajar por cualquier gas, líquido o sólido. Seguramente intuimos la propagación del sonido a través de un sólido, por los parlantes del aparato de sonido del vecino que están junto a una pared de tu casa. Las ondas sonoras más sencillas son las senoidales, las cuales tienen la frecuencia, la amplitud y la longitud de onda completamente especificadas. El oído humano es sensible a las ondas en el intervalo de frecuencias de $20 - 20,000\ Hz = \frac{1}{seg}$, llamada gama audible, pero también usamos el término sonido para ondas similares con frecuencias mayores (ultrasónicas) y menores (infrasónicas).

Las ondas sonoras pueden describirse en términos de variaciones de presión en diversos puntos. En una onda sonora senoidal en aire, la presión fluctúa por arriba y por debajo de la presión atmosférica (p_a) en forma senoidal con la misma frecuencia que los movimientos de las partículas de aire. El oído humano funciona detectando tales variaciones de presión. Una onda sonora que entra en el canal auditivo ejerce una presión fluctuante sobre un lado del tímpano; el aire del otro lado, comunicado con el exterior por la trompa de Eustaquio, está a presión atmosférica. La diferencia de presión entre ambos lados del tímpano lo pone en movimiento. Los micrófonos y dispositivos similares por lo regular también detectan diferencias de presión, no desplazamientos, así que resulta muy útil establecer una relación entre estas dos descripciones.

Sea $p(x,t)$ la fluctuación de presión instantánea en una onda sonora en cualquier punto x en el instante t. Es decir, $p(x,t)$ es la cantidad en que la presión difiere de la presión atmosférica normal p_a. Pensemos en$p(x,t)$ como la presión manométrica (respecto a la atmosférica) definida en la sección y que puede ser positiva o negativa. La presión absoluta en un punto es entonces$p_a + p(x,t)$.

Para ver el vínculo entre la fluctuación de presión $p(x,t)$ y el desplazamiento $y(x,t)$(ahora horizontasl) de las partículas en una onda sonora que se propaga en la dirección $+x$, consideremos un cilindro imaginario de un material (gas, líquido, sólido) con área transversal S y su eje a lo largo de la dirección de propagación.



Si no está presente una onda sonora, el cilindro tiene longitud Δx y volumen $V = S\Delta x$, volumen sombreado en la figura. Si una onda está presente, al tiempo t el extremo del cilindro que estaba en x tiene un desplazamiento dado por $y_1 = y(x,t)$, y el extremo que estaba en $x + \Delta x$ se desplaza $y_2 = y(x + \Delta x, t)$; esto se indica con líneas rojas. Si$y_2 > y_1$ como en la figura, el volumen del cilindro aumentó, originando una disminución de la presión porque tenemos la mísma materia en un volumén más grande. Si $y_2 < y_1$, el volumen disminuyó, y la presión aumentó. Si $y_2 = y_1$, el cilindro simplemente se desplazó a la izquierda o a la derecha; no hay cambio de volumen ni fluctuación de presión. La fluctuación de presión depende de la diferencia entre el desplazamiento de puntos vecinos del medio.

Cuantitativamente, el cambio de volumen y el cambio relativo de volúmen serán

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= S(y_2 - y_1) = S(y(x+\Delta x,) - y(x,t)) \\
\frac{\Delta V}{V} &= \frac{\cancel{S}(y(x+\Delta x,) - y(x,t))}{\cancel{S}\Delta x},
\end{aligned}
$$

si ahora tomamos el límite $\Delta x \to 0, \Delta V \to dV$, obtendremos

$$
\frac{dV}{V} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}.
$$

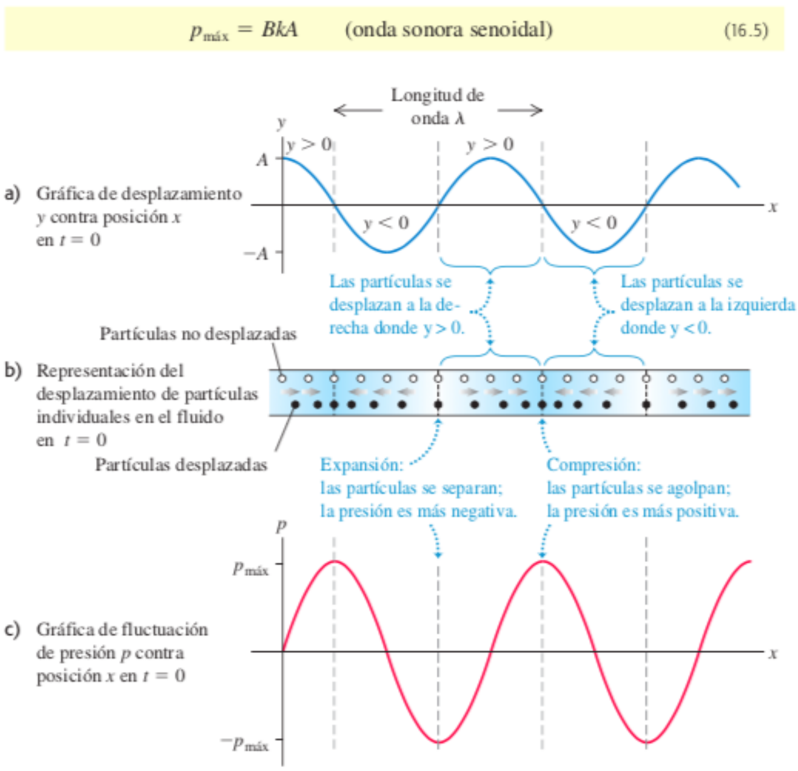
Ahora, en todo medio elástico pueden definirse módulos de compresibilidad como la fuerza aplicada dividido la reducción relativa en la longitud o área, etc. Para el caso de un gas el módulo de compresibilidad es la relación entre la presión y el cambio relativo de volúmen

$$
B = \frac{p(x,t)}{-\frac{dV}{V}} \Rightarrow p(x,t) = -B\frac{\partial y(x,t)}{\partial x},
$$

donde el signo menos se agrega para que cuando el incremento de presión es positivo haya reducción de volúmen, y donde hemos usado la relación anterior. Si ahora suponemos que las partículs estan oscilando horizontalmente con la expresión $y(x,t) = Asen(kx - \omega t)$ tendremos

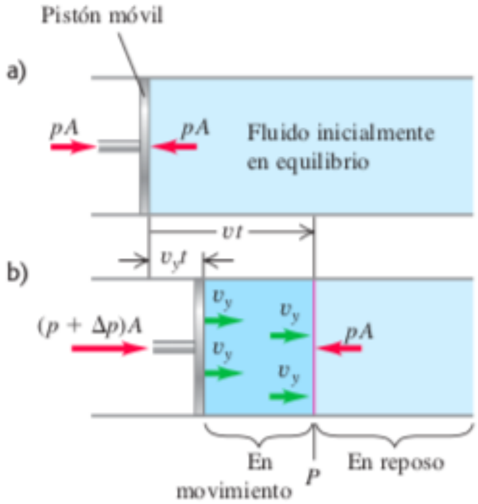
$$
p(x,t) = BkAsen(kx - \omega t).
$$

En la siguiente figura podemos ver la relación entre desplazamiento horizontal y presión



10.8 Velocidad del sonido en un fluido

La figura siguiente muestra un fluido (líquido o gas) con densidad ρ en un tubo con área transversal A. En el estado de equilibrio, el fluido está sometido a una presión uniforme p. En la figura a) el fluido está en reposo. Tomamos el eje x a lo largo del tubo. Ésta es también la dirección en que hacemos que se propague una onda longitudinal, así que el desplazamiento y también se mide a lo largo del tubo.



En el instante $t = 0$, el pistón del extremo izquierdo comienza a moverse hacia la derecha con rapidez constantev_y. Esto inicia un movimiento ondulatorio que viaja a la derecha a lo largo del tubo, donde secciones sucesivas de fluido comienzan a moverse y a comprimirse en instantes sucesivamente posteriores. La figura b) se muestra el fluido en el instante t. Todas las porciones del fluido a la izquierda del punto P se mueven a la derecha con rapidez v_y, y todas las porciones a la derecha de P están aún en reposo. La frontera entre las porciones en movimiento y estacionaria viaja a la derecha con una rapidez igual a la rapidez de propagación o rapidez de onda v. En el tiempo$t$, el pistón se mueve una distancia $v_y t$ y la frontera avanza una distancia vt. Al igual que con las perturbaciones transversales en una cuerda, podemos calcular la rapidez de propagación a partir del teorema del impulso y la variación de momento lineal. La cantidad de fluido puesta en movimiento en el tiempo t es la cantidad que originalmente ocupaba una sección del cilindro con longitud vt, área transversal$A$ y volumen vtA. La masa de este fluido es ρvtA, y su momento lineal longitudinal (a lo largo del tubo) es

$$\Delta p_y = (\rho vtA)v_y$$

Si ahora ahora calculamos el aumento de presión, Δp, en el fluido en movimiento, y el volúmen original de este fluido, Avt, disminuyó en una cantidad $Av_y t$, por la definición del módulo de volumen B, tendremos

$$\begin{aligned} B &= \frac{-Cambio\,de\,presión}{Cambio\,fraccionario\,de\,volumen} = \frac{-\Delta p_y}{-A\frac{v_y t}{Avt}} \\ \Delta p_y &= B\frac{v_y}{v} \end{aligned}$$

La presión en el fluido en movimiento es $p+\Delta p$, y la fuerza ejercida sobre él por el pistón es $(p+\Delta p)A$. La fuerza neta sobre el fluido en movimiento será entonces es ΔpA, y el impulso longitudinal será (fuerza por tiempo)

$$I_y = \Delta p_y \Delta t = B\frac{v_y}{v}At.$$

Dado que el fluido estaba en reposo en $t = 0$, el cambio de momento lineal hasta el instante t es igual al mometo lineal en t. Aplicando el teorema de impulso y cambio del momento lineal, vemos que

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= I_y \\ \rho v t A v_y &= B \frac{v_y}{v} A t \end{aligned}$$

de donde puede obtenerse

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$$

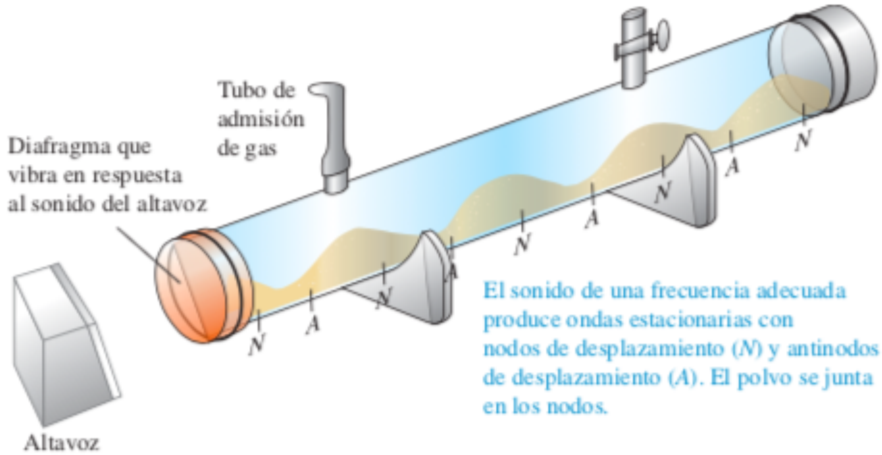
lo que concuerda con nuestra conjetura. Así, la rapidez de propagación de un pulso longitudinal en un fluido únicamente depende del módulo de volumen B y de la densidad ρ del medio. Cuando se estudia la velocidad de propagación del sonido en un sólido se cambia B por el llamado módulo de elasticidad del sólido. Veamos algunos valores

Material	**Rapidez del sonido (m/s)**
Gases	
Aire (20 °C)	344
Helio (20 °C)	999
Hidrógeno (20 °C)	1330
Líquidos	
Helio líquido (4 K)	211
Mercurio (20 °C)	1451
Agua (0 °C)	1402
Agua (20 °C)	1482
Agua (100 °C)	1543
Sólidos	
Aluminio	6420
Plomo	1960
Acero	5941

10.9 Ondas sonoras estacionarias y modos normales

Cuando ondas longitudinales de sonido se propagan en un fluido dentro de un tubo con longitud finita, se reflejan en los extremos igual que las ondas transversales en una cuerda. La superposición de las ondas que viajan en direcciones opuestas forma también una onda estacionaria. Al igual que las ondas estacionarias transversales en una cuerda, las ondas sonoras estacionarias (modos normales) en un tubo pueden servir para crear ondas de sonido en el aire circundante. Éste es el principio de operación de la voz humana y de muchos instrumentos musicales, incluidos los de viento de madera y de metal, y los órganos. Las ondas transversales en una cuerda, incluidas las estacionarias, suelen describirse sólo en términos del desplazamiento de la cuerda. En cambio, ya vimos que las ondas sonoras en un fluido pueden describirse en términos del desplazamiento del fluido, o bien, en términos de variaciones en la presión del fluido. Para evitar confusiones, usaremos los términos nodo de desplazamiento y antinodo de despla- zamiento, para referirnos a puntos donde las partículas del fluido tienen cero desplazamiento y máximo desplazamiento, respectivamente.

Podemos demostrar las ondas sonoras estacionarias en una columna de gas con un aparato llamado tubo de Kundt (ver la siguiente figura). Un tubo horizontal de vidrio de aproximadamente 1 m de longitud se cierra por un extremo, y en el otro se instala un diafragma flexible que puede transmitir vibraciones. Un altavoz cercano se conecta a un oscilador y amplificador de audio, y produce ondas sonoras que obligan al diafragma a vibrar senoidalmente con una frecuencia que podemos variar. Las ondas sonoras dentro del tubo se reflejan en el extremo cerrado. Esparcimos uniformemente un poco de polvo fino en el interior del tubo. Al variar la frecuencia del sonido, pasamos por frecuencias en las que la amplitud de las ondas estacionarias es lo bastante grande como para que el polvo sea acarreado a lo largo del tubo en los puntos donde se mueve el gas. Por lo tanto, el polvo se acumula en los nodos de desplazamiento (donde el gas no se mueve). Los nodos adyacentes están separados una distancia igual a $\lambda/2$, la cual podemos medir. Teniendo la longitud de onda, podemos usar este experimento para determinar la rapidez de las ondas: leemos la frecuencia f del oscilador y así podemos calcular la rapidez v de las ondas usando la relación $v = \lambda f$.

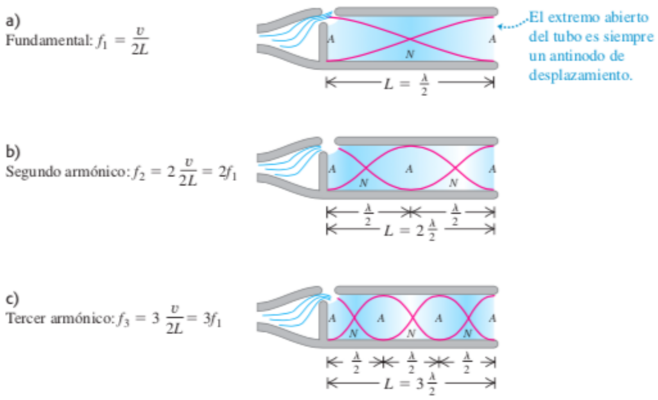


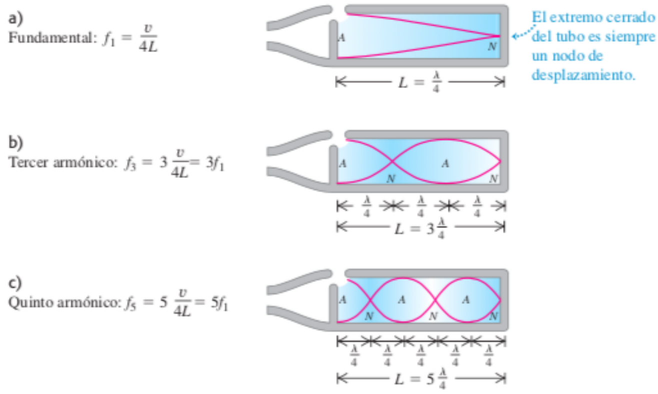
Teniendo en cuenta los movimientos de las partículas diferentes dentro de un tubo lleno de gas, donde hay una onda estacionaria se ve que una partícula en un nodo de desplazamiento (N) no se mueve; mientras que una partícula en un antitodo de desplazamiento (A) oscila con amplitud máxima. Observe que las partículas en lados opuestos del nodo vibran en fase opuesta. Cuando estas partículas se acercan entre sí, el gas entre ellas se comprime y la presión aumenta; cuando se alejan, hay una expan- sión y la presión baja. Así, en un nodo de desplazamiento el gas sufre compresión y expansión máximas, y las variaciones de presión y densidad arriba y abajo de la media tienen su valor máximo. En contraste, las partículas en lados opuestos de un anti- nodo de desplazamiento vibran en fase; la distancia entre ellas es casi constante, y la presión y la densidad no varían en el antinodo.

En conclusión un nodo de presión siempre es un antinodo de desplazamiento, y un antinodo de presión. Cuando hay reflexión en un extremo cerrado de un tubo (con una barrera o tapón rígido), el desplazamiento de las partículas en ese extremo siempre debe ser cero, como en el extremo fijo de una cuerda. Así, el extremo cerrado del tubo es un nodo de desplazamiento y un antinodo de presión; las partículas no se mueven, pero las variaciones de presión son máximas. Un extremo abierto de un tubo es un nodo de presión porque está abierto a la atmósfera, donde la presión es constante. Por ello, tal extremo siempre es un antinodo de desplazamiento, análogo al extremo libre de una cuerda; las partículas oscilan con amplitud máxima, pero la presión no varía. Así, las ondas longitudinales en una columna de fluido se reflejan en los extremos cerrados y abiertos de un tubo, igual que las ondas transversales en una cuerda se reflejan en los extremos fijo y libre, respectivamente.

10.10 Tubos de órganos e instrumentos de viento

La aplicación más importante de las ondas sonoras estacionarias es la producción de tonos musicales con instrumentos de viento. Los tubos de órgano son uno de los ejemplos más sencillos. Un fuelle alimenta aire a una presión manométrica del orden de 103 Pa (102 atm) en el extremo inferior del tubo . Una corriente de aire sale por la abertura angosta en el borde de la superficie horizontal y se dirige hacia el borde superior de la abertura, llamada boca del tubo. La columna de aire en el tubo comienza a vibrar, y hay una serie de modos normales posibles, igual que en una cuerda estirada. La boca siempre actúa como extremo abierto, así que es un nodo de presión y un antinodo de desplazamiento. El otro extremo del tubo puede estar abierto o cerrado. En la figura esquematizamos ésto.





10.11 Efecto Doppler

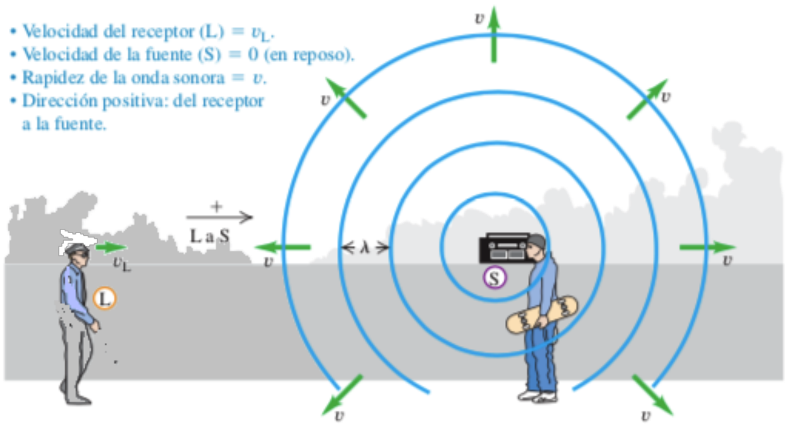
Quizás hemos notado que, cuando un tren se acerca tocando el silbato, el tono parece bajar al pasar. Este fenómeno, descrito por primera vez por el científico austriaco del siglo XIX Christian Doppler, se llama efecto Doppler. Cuando una fuente de sonido y un receptor están en movimiento relativo, la frecuencia del sonido oído por el receptor no es el mismo que la frecuencia fuente. Se presenta un efecto similar con las ondas de luz y radio. Con la finalidad de analizar el efecto Doppler para el sonido, deduciremos una relación entre el cambio de frecuencia, y las velocidades de la fuente y el receptor relativas al medio (usualmente aire) por el que se propagan las ondas sonoras. Por sencillez, sólo consideraremos el caso especial en que las velocidades de la fuente y el receptor están a lo largo de la línea que los une. Seanv_S y v_L las componentes de velocidad en esta línea de la fuente (S) y el receptor (L), respectivamente, relativas al medio. Elegimos como dirección positiva la que va del receptor L a la fuente S. La rapidez del sonido relativa al medio v siempre se considera positiva.

10.11.1 Receptor en movimiento

Imaginemos primero un receptor L que se mueve con velocidad v_L hacia una fuente estacionaria o fija S como muestra la figura. La fuente emite una onda sonora con frecuenciaf_S y longitud de onda$\lambda = v/f_S$. La figura muestra varias crestas de onda, separadas por distancias igualesλ. Las crestas que se acercan al receptor en movimiento tienen una rapidez de propagación relativa al receptor de $(v + v_L)$, así que la frecuencia f_L con que llegan a la posición del receptor (esto es, la frecuencia que el receptor oye) es

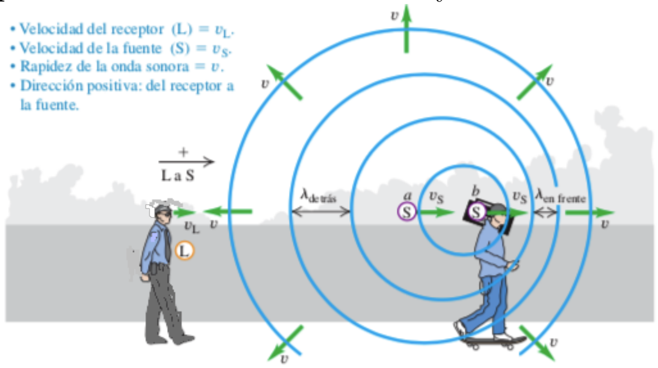
$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} = (1 + \frac{v_L}{v})f_s$$

Así, un receptor que se mueve hacia una fuente $(v_L > 0)$, como en la figura, oye una frecuencia más alta (tono más agudo) que un receptor estacionario. Un receptor que se aleja de la fuente $(v_L < 0)$ oye una frecuencia más baja (tono más grave).



10.11.2 Fuente en movimiento y receptor en movimiento

Suponga ahora que la fuente también se mueve, con velocidad v_S. La rapidez de la onda relativa al medio (aire) sigue siendo v; está determinada por las propiedades del medio y no cambia por el movimiento de la fuente. Sin embargo, la longitud de onda ya no es igual a v/f_S; veamos por qué. El tiempo que tarda en emitirse un ciclo de la onda es el periodo $T = 1/f_S$. Durante este tiempo, la onda viaja una distancia $vT = v/f_S$y la fuente se mueve una distancia$v_S T = v_S/f_S$. La longitud de onda es la distancia entre crestas sucesivas, y depende del desplazamiento relativo de la fuente y la onda. Como muestra la figura éste es diferente adelante y atrás



de la fuente. En la región a la derecha o izquierda de la fuente en la figura (es decir, adelante de la fuente o atrás), la longitud de onda es

$$\begin{aligned} \lambda_{frente} &= \frac{v}{f_S} - \frac{v_S}{f_S} = \frac{v - v_S}{f_S} \\ \lambda_{atrás} &= \frac{v + v_s}{f_S}, \end{aligned}$$

las ondas adelante y atrás de la fuente se comprimen y estiran, respectivamente, por el movimiento de la fuente. Para obtener la frecuencia que oye el receptor detrás de la fuente, sustituimos la segunda ecuación en del capitulo anteriror obtendremos

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S,$$

esto expresa la frecuencia fL oída por el receptor en términos de la frecuencia f_S de la fuente.