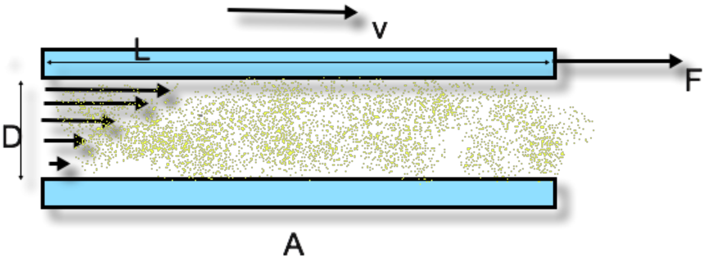
9.7 Viscosidad

Hasta el momento hemos supuesto que no habia roce entre dos capas de fluido y entre un fluido y el tubo que lo conduce. Sin embargo los fluidos reales presentan ese roce o lo que llamamos viscosidad. Podriamos determinar cuanto nos cuesta desplazar una lamina de área A y longitud L de vidrio con velocidad v sobre otra separada una distancia D y fija habiendo cierto fluido viscoso en el espacio entre ambas



y comprobariamos que es proporcional al área , a la velocidad e inversamente proporcional a la separación, siendo el coeficiente de proporcionalidad el llamado coeficiente de viscosidad η

$$F = \eta A \frac{v}{D}$$

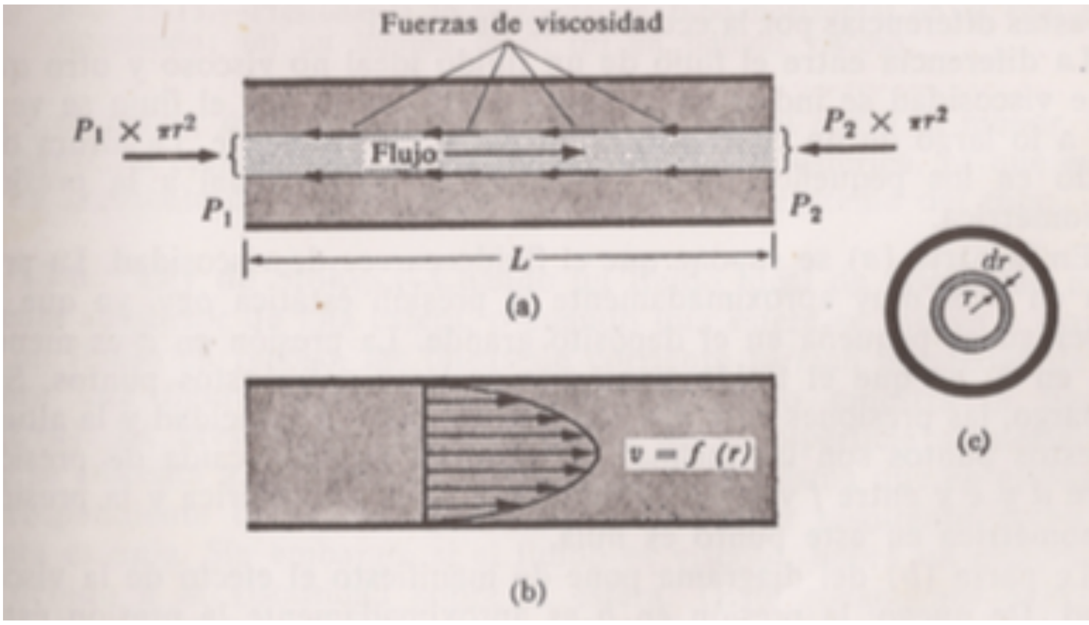
y esto puede entenderse porque las capas de fluido se van poniendo en movimiento desde velocidad cero (el que esta adherido a la superficie inferior) hasta la velocidad v (el que está pegado a la lámina superiror). El cociente $\frac{v}{D} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$ que es el cambio medio de la velocidad entre la superficie inferior y superior respecto a la coordenada vertical lo llamamos gradiente de velocidad y en el caso en que la distancia entre placas tienda a cero este cambio medio se transformará en la derivada $\frac{dv}{dy}$ y así finalmente tendremos

$$\boxed{F = \eta A \frac{dv}{dy}.}$$

El coeficiente de viscosidad se mide en $[\eta] = \frac{N}{m^2} seg$ o mas adecuadamente por las magnitudes de las cantidades involucradas $\frac{dina}{cm^2} seg = poise$ o $cp = 10^{-2} poise, \mu p = 10^{-6} poise$ en honor del Físico frances Poiseuille. La viscosidad depende fuertemente de la temperatura disminuyendo con ésta. Por ejemplo la viscocidad del agua pasa de $1.8 cp$ a $0.28 cp$ desde $0^0 c$ a $100^0 c$.

9.7.1 Ley de Poiseuille

Ahora queremos obtener el perfíl de velocidades en la sección de un tubo de radio R. Antes cuando considerabamos al fluido sin viscosidad todos los puntos de una sección transversal de una tuberia tenian la misma velocidad, pero ahora la velocidad aumentará desde las paredes del tubo donde el fluido está adherido por la viscosidad hasta el centro donde tendremos la máxima velocidad. Ahora aunque el tubo tenga sección constante se presentará una diferencia de presión porque debe haber una fuerza neta que mueva al fluido para vencer al roce



y si consederamos un tubo imaginario de radio r y longitud L con eje en el centro del tubo que se nueve a velocidad constante $v(r)$ tendremos que las fuerzas de presión deben equilibrar a las viscosas

$$P_1 \pi r^2 - P_2 \pi r^2 \;=\; F = -\eta A \frac{dv}{dr} = -\eta \times 2\pi r L \times \frac{dv}{dr},$$

donde hemos aplicado la expresión anterior para el gradiente de velocidad con el radio y hemos agregado un signo menos porque ahora hay una disminución de la velocidad desde el centro hacia los bordes del tubo, y hemos considerado como "área de roce " A al área externa del tubo que es $2\pi r L$. De la expresión anterior integrando entre $r = 0, R$ finalmente se obtiene

$$\boxed{v(r) \;=\; \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)}$$

que se conoce como perfil de velocidades o Ley de Poiseuille. A partir de dicha ecuación es directo obtener el caudal de fluido (volúmen por unidad de tiempo) que circula por una tuberia de radio R y longitud L. Primeramente calculamos el volúmen que lleva un tubo imaginario de radio r y espesor dr durante dt, y el caudal $Q(r)$ que será el cociente de dicho volúmen con el tiempo

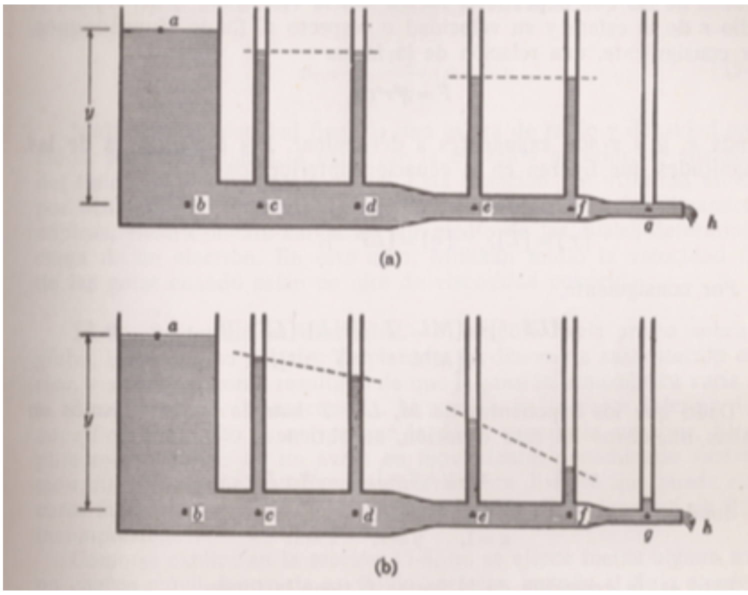
$$\begin{aligned} dV &= v(r) dt \times 2\pi r dr \\ Q(r) &= \frac{dV}{dt} = v(r) 2\pi r dr = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) 2\pi r dr \end{aligned}$$

e integrando entre $r = 0, R$ obtenemos el caudal total que transporta el tubo

$$\boxed{Q \;=\; \frac{\pi}{8} \frac{R^4}{\eta} \frac{P_1 - P_2}{L}}$$

donde vemos que el caudal depende de la diferencia de presión entre los extremos del tubo, la longitud del mísmo, su radio y el coeficiente de viscosidad del liquido transportado. Si no existen fuentes ni sumideros en el trayecto del fluido, que aún siendo viscoso se considera incompresible, el caudal debe mantenerse constante.

Una de las consecuencia más notables de tener ahora un liquido real y no ideal es que no podemos aplicar Bernoulli (hay trabajo de fuerzas disipativas) y la situación de igualdad de presión en dos puntos de una cañeria de sección constante ya no es válida pues necesitamos diferencia de presión para mover el fluido ahora, así lo mostramos en la siguiente figura donde arriba tenemos un fluido ideal y abajo un viscoso



9.7.2 Ley de Stokes

Otra forma de medir el coeficiente de viscosidad es usando una dispositivo llamado viscosimetro de Stokes, que es un tubo vertical largo lleno de un fluido con viscosidad donde se suelta en la parte superior una esféra de radio R y ésta cae acelerandose por acción del peso hasta que la fuerza viscosa y de empuje hidrostático igualan al peso y la bolita alcanza una velocidad límite constante. Stokes comprobó que la fuerza viscosa tenía una expresión

$$F = \eta R v$$

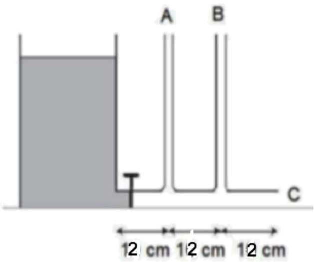
donde v es la velocidad instantánea de la bolita, que alcanzará su valor límite constante v_L cuando

$$\begin{aligned} P &= F + E \\ \rho_{bolita}\frac{4}{3}\pi R^3 g &= \eta R v_L + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{liquido} g \\ \eta &= \frac{\left(\rho_{bolita} - \rho_{liquido}\right)\frac{4}{3}\pi R^2 g}{v_L} \end{aligned}$$

donde si medimos la velocidad límite v_L y sabemos las densidades y radio de la bolita se puede hacer una determinación experimental de η.

Ejemplo:

Un depósito tiene una gran superficie abierta a la atmósfera y en su parte inferior desagota a un tubo horizontal de 1cm de radio, a su vez conectado a dos tubos verticales A y B, y finalmente arroja el liquido a la atmósfera en C. a) Si el depósito está lleno de agua (supuesta no viscosa) hasta una altura de 50 cm sobre la base, y se abre la llave, cuál será el caudal por el tubo horizontal y las alturas del liquido en los tubos de VenturiA y B ? b) Si ahora se llena el depósito con un liquido de viscosidad $\eta = 0.15$ Poise y una densidad $\rho = 0.9$g/cm3 , y la altura en el tanque es tal que, una vez abierta la llave, el caudal saliente es igual que el calculado en la parte a). Determinar la altura a la que sube el fluido en los tubos A y B.



En el punto a) podemos aplicar Bernoulli pues se trata de un fluido no viscoso asi despreciando la velocidad de descenso en el depósito, teniendo en cuenta que cuando el fluido es no viscoso siendo la sección del tubo horizontal constante $v_A = v_B,\ p_A = p_B$

$$
\begin{aligned}
\rho g 51cm + p_{atm} &= \frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A \\
\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A &= \frac{1}{2}\rho v_C^2 + p_{atm} \\
&\Downarrow \\
\cancel{\rho} g 51cm + \cancel{p_{atm}} &= \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_C^2 + \cancel{p_{atm}} \\
&\Downarrow \\
v_c &= \sqrt{2 \times 980\frac{cm}{seg^2} \times 51cm} = 316.16cm/seg \\
Q &= A_C v_c = \pi(1cm)^2 316.16cm/seg = 993.3cm^3/seg
\end{aligned}
$$

Ahora, cuando el líquido es viscoso no podemos aplicar Bernoulli, tendremos que $v_A \neq v_B, p_A \neq p_B$, pero asumimos que el caudal es el mísmo de antes y podemos usar

$$
\begin{aligned}
993.3(0.01m)^3/seg &= \frac{\pi}{8}\frac{(0.01m)^4}{0.15\frac{N}{m^2 seg}}\frac{P_A - P_B}{0.12m} \\
993.3(0.01m)^3/seg &= \frac{\pi}{8}\frac{(0.01m)^4}{0.15\frac{N}{m^2 seg}}\frac{P_B - P_{atm}}{0.12m} \\
P_B &= \frac{8 \times 993.3(0.01\cancel{m})^3/\cancel{seg} \times 0.15\frac{N}{m^2\cancel{seg}} \times 0.12\cancel{m}}{\pi(0.01\cancel{m})^4} + 1.033 \times 9.8N/(0.01m)^2 \simeq 106000Pa \\
P_A &= \frac{8 \times 993.3\cancel{(0.01m)^3}/\cancel{seg} \times 0.15\frac{N}{m^2\cancel{seg}} \times 0.12\cancel{m}}{\pi(0.01\cancel{m})^{\cancel{4}}} + P_B \simeq 110300Pa \\
h_A &= \frac{P_A - P_{atm}}{\rho g} = \frac{9066Pa}{1000kg/m^3 9.8m/seg^2} = 0.93m \\
h_B &= \frac{P_B - P_{atm}}{\rho g} = \frac{4552Pa}{1000kg/m^3 9.8m/seg^2} = 0.46m
\end{aligned}
$$