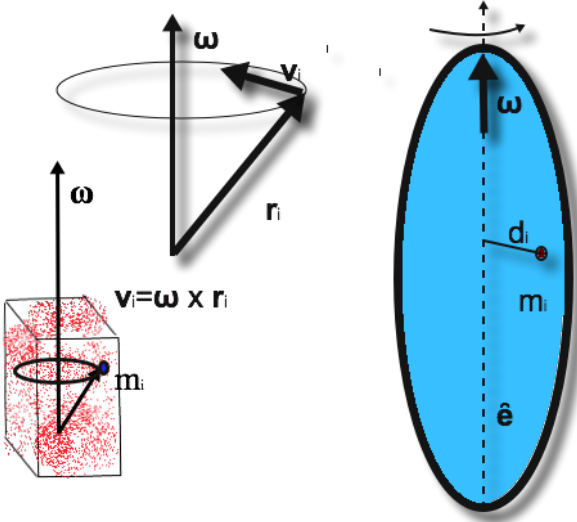


8.4 Cuerpo rígido

Hasta el momento no hemos hecho ninguna referencia a la naturaleza de nuestro sistema de partículas y por lo tanto nuestras conclusiones son generales. Hay un caso particular que merece ser tratado por la variedad de situaciones en la que se presenta y es el denominado cuerpo rígido donde las posiciones relativas entre las partículas se mantienen constantes. Como las partículas no pueden acercarse ni alejarse la única posibilidad que le queda al sistema es trasladarse como un todo y rotar respecto a algún eje. La condición que permite tener en cuenta esto es que para cada partícula se cumple



$$\mathbf{v}_i(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i(t)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ indica una dirección y sentido y una velocidad angular de rotación común a todas las partículas. Si ahora metemos esta condición en el cálculo del momento angular del sistema tendremos ($\sum_i \equiv \sum_{i=1}^N$)

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) \\ &= -\sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i + \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} \\ &= \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la identidad $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$. Ahora para simplificar y sin pérdida de generalidad podríamos tomar nuestro eje Z a lo largo de la velocidad angular y así $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ con lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_i m_i z_i \omega \mathbf{r}_i \\ &= \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_i m_i z_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\omega \sum_i m_i z_i x_i, \omega \sum_i m_i z_i y_i, 0) \\ &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) (0, 0, \omega) - \omega (\sum_i m_i z_i x_i, \sum_i m_i z_i y_i, 0) \end{aligned}$$

donde hemos separado en componentes a \mathbf{r}_i y usado el hecho de que $\boldsymbol{\omega}$ apunta a lo largo del eje Z. La ecuación anterior podría resumirse como

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sum_i m_i z_i x_i \\ 0 & 0 & -\sum_i m_i z_i y_i \\ 0 & 0 & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix},$$

si queremos simplificar aún más, podemos considerar que el cuerpo rígido es simétrico respecto al eje de rotación como sucedería como un cilindro girando alrededor de un eje que pasa por el centro de sus bases o una esfera alrededor de un eje que pasa por su centro y en ese caso si tenemos una partícula en (x_i, y_i, z_i) tendremos otra en $(-x_i, -y_i, z_i)$ con lo que las sumas sobre todas las partículas de $z_i x_i$ y $z_i y_i$ se van, finalmente tenemos la expresión simplificada válida cuando rotamos alrededor del eje Z y cuando el cuerpo presenta simetría respecto al eje de rotación

$$L_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega \equiv \left(\sum_i m_i d_i^2 \right) \omega$$

a la magnitud $I = \sum_i m_i d_i^2$ que depende de las masas de las partículas del sistema y de su distancia al eje de rotación lo llamamos momento de inercia y en este caso simplificado es un número de dimensiones *masa* \times *longitud*². En realidad podríamos tomar un eje cualquiera de rotación dirigido según \hat{e} y así $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{e}$, donde este eje es de simetría del cuerpo rígido y tendríamos

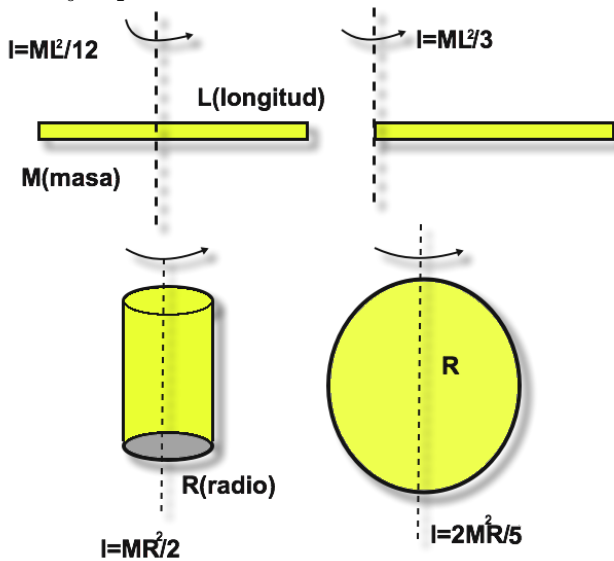
$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= I \boldsymbol{\omega} \\ I &= \sum_i m_i d_i^2, \end{aligned}$$

siendo d_i la distancia de la partícula i -ésima al eje \hat{e} .

Cuando el cuerpo es continuo y su masa está distribuida según una densidad de masa $\rho(\mathbf{r})$ tendremos

$$I = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) d(\mathbf{r})^2,$$

donde la función distancia $d(\mathbf{r})$ me da la distancia al eje de rotación del elemento de masa $dm = \rho(\mathbf{r}) d^3r$. Algunos ejemplos de momentos de inercia de ciertos cuerpos son dados en la siguiente figura



Algunas observaciones tenemos que hacer

- Nuestro origen de coordenadas en un cuerpo de masa M lo estamos tomando sobre el eje \hat{e} en algún lugar, si quisieramos calcular el momento de inercia respecto a otro eje $\hat{e}' \parallel \hat{e}$ separado una distancia D entonces aplicamos el llamado teorema de Steiner (que puede demostrarse) y obtenemos

$$I' = I + MD^2$$

- Cuando tenemos un cuerpo compuesto por varias partes con momentos de inercia I_1, I_2, \dots todas calculadas respecto al mismo eje, el momento de inercia total es $I_1 + I_2 + \dots$
- Para calcular el \mathbf{L}_{int} en un cuerpo rígido respecto a algún eje de rotación que pase por el CM tendremos que calcular el momento de inercia respecto a dicho eje y así

$$\mathbf{L}_{int} = I_{CM}\boldsymbol{\omega}$$

- La energía cinética para un cuerpo rígido rotando respecto a un determinado eje (que como al comienzo lo colocamos primero a lo largo del eje Z) toma una forma particular usando $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i [\boldsymbol{\omega}^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2] = 1/2 \boldsymbol{\omega}^2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{2} I \boldsymbol{\omega}^2 \end{aligned}$$

Ahora si tomamos este eje pasando por CM esta será la energía cinética intrínseca respecto al CM y la energía cinética total del sistema será

$$E_c = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \boldsymbol{\omega}^2$$

con una parte debida a la traslación del CM y otra de rotación respecto al CM. Finalmente tendremos para el cuerpo rígido en particular y para las restricciones mencionadas de rotar a entorno a un eje llamado Z y cuerpo simétrico,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext}, \quad \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} = \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}^{ext}, \\ \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{L}_{orb}}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_{int}}{dt} = \mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{a}_{CM} + I_{CM} \boldsymbol{\alpha}. \end{aligned}$$

Si aplicamos $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{CM}(t) + \mathbf{R}_{CM}(t)$ a los torques externos tendremos

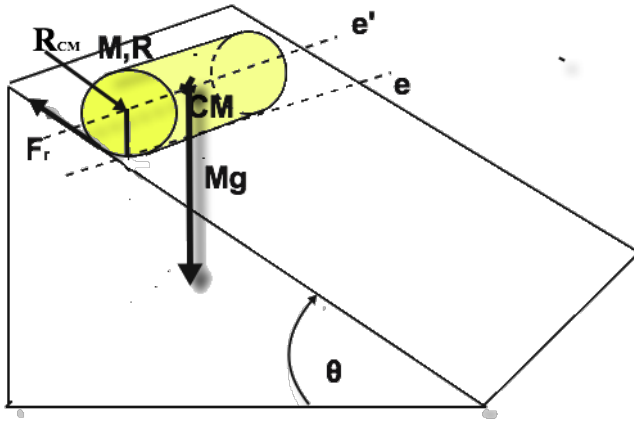
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} &= \sum_{i=1}^N \sum_k (\mathbf{r}_i^{CM}(t) + \mathbf{R}_{CM}(t)) \times \mathbf{F}_{ik}^{ext} (\mathbf{r}_i^{CM}(t) + \mathbf{R}_{CM}(t)) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\sum_k \mathbf{r}_i^{CM}(t) \times \mathbf{F}_{ik}^{ext} (\mathbf{r}_i^{CM}(t) + \mathbf{R}_{CM}(t)) + \mathbf{R}_{CM}(t) \times \sum_k \mathbf{F}_{ik}^{ext} \right], \end{aligned}$$

si además $\sum_k \mathbf{F}_{ik}^{ext} = 0$ entonces el CM se mueve a velocidad constante $\mathbf{R}_{CM}(t) = \mathbf{V}_{CM}t$ y será inercial un sistema puesto allí y podemos pararnos en el CM con los cual los torque se evaluan en dicho sistema de referencia, no olvidemos que para deducir la evolución temporal de \mathbf{L} usamos la tercera ley de Newton. Cuando las fuerzas externas son constantes independientes de la posición entonces

$$\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} = \sum_{i=1}^N \sum_k \mathbf{r}_i^{CM}(t) \times \mathbf{F}_{ik}^{ext} + \mathbf{R}_{CM}(t) \times \sum_{i=1}^N \sum_k \mathbf{F}_{ik}^{ext}.$$

Ejemplo1

Determinar la velocidad que tendrá el CM y de rotación ω alrededor de un eje que pase por el CM, de un cilindro homogeneo que partiendo del reposo que cae desde una altura H sobre un plano inclinado, cuya masa es M y su radio R, sin deslizar, cuando llegue a la parte inferior.



Nos encontramos aquí con un elemento nuevo, la fuerza de roce por rodadura que es diferente a la de deslizamiento. Sin entrar en detalles sobre esta fuerza lo importante es que el punto de contacto siempre estará debajo del eje de rotación alrededor del CM con lo que es desplazamiento del punto de contacto sobre el cilindro será el mismo que lo que se desplace el CM o sea $ds = V_{CM}dt \Rightarrow ds/dt = v_T = V_{CM} = R\omega$.

Si planteamos las ecuaciones de movimiento y consideramos al cilindro como sistema de partículas rígido, la única fuerza externa que produce un torque respecto al eje que pasa por el CM es la \mathbf{F}_r (suponemos que el eje Z esta saliendo hacia afuera), además $\mathbf{R}_{CM} \times (-\mathbf{P} + \mathbf{N}) = \mathbf{R}_{CM} \times (-\mathbf{P}_\perp + \mathbf{N}) = \mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{0}$, pero tenemos dos fuerzas externas que aceleran el CM y la condición de no deslizamiento

$$\begin{aligned} -F_r R &= I_{CM} \frac{d\omega}{dt} \\ N - Mg \cos \theta &= 0 \\ -F_r + Mg \sin \theta &= M \frac{dV_{CM}}{dt} \\ \frac{dV_{CM}}{dt} &= R \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

asi resolviendo al multiplicar la tercera por R^2 (recordemos que para un cilindro homogéneo $I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$)

$$\begin{aligned}
I_{CM} \frac{dV_{CM}}{dt} + R^2 Mg \sen\theta &= MR^2 \frac{dV_{CM}}{dt} \\
\frac{dV_{CM}}{dt} &= \frac{R^2 Mg \sen\theta}{MR^2 - I_{CM}} = \frac{R^2 Mg \sen\theta}{MR^2/2} = 2g \sen\theta \\
V_{CM}(t) &= V_{CM}(0) + 2g \sen\theta t \\
X_{CM}(t) &= X_{CM}(0) + V_{CM}(0)t - g \sen\theta t^2 \\
\omega(t) &= V_{CM}(t)/R
\end{aligned}$$

si planteamos que $X_{CM}(t) - X_{CM}(0) = \frac{H}{\sen\theta}$ de allí despejamos el tiempo que tarda en llegar a la parte más baja del plano y con estas velocidades allí.

Otra forma de plantear el problema es mediante consideraciones energéticas si planteamos conservación de la energía pues la fuerza de roce por rodadura no realiza trabajo ya que su punto de aplicación no se desplaza tendremos

$$\begin{aligned}
E_M &= E'_M \\
MgH &= \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\frac{V_{CM}^2}{R^2} \\
&= \frac{3}{4}MV_{CM}^2 \Rightarrow V_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gH}
\end{aligned}$$

Finalmente notemos que si tomáramos como eje de rotación el de contacto con el plano podríamos considerar al movimiento como una rotación pura y la energía cinética sería (usando Steiner y $V_{CM} = R\omega, D = R$)

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}I\omega'^2 = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega'^2 \\
E_c(\text{antes}) &= \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2
\end{aligned}$$

de donde se ve comparando que $\omega = \omega'$, y no importa si cambiamos el eje de rotación la velocidad angular es la misma.

Finalmente recordemos que una partícula estaba en equilibrio cuando la fuerza neta era cero. Para un cuerpo rígido es más complicado porque debemos pedir que la fuerza neta sea cero para que el CM se mueva con velocidad cte y que la suma de los torques externos respecto del CM sean cero para no tener aceleración angular y velocidad angular cte. Más aún como vimos antes que

$$\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{iNeta}^{ext} = \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{\tau}_{iNeta}^{ext})_{CM}$$

si $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} = \mathbf{0}$, deberá ser el torque nulo respecto a cualquier eje pues hacer un cambio de eje significa $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{d}$ dando el segundo término una contribución $\mathbf{d} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} = 0$ y en especial respecto al CM. Por lo tanto un cuerpo rígido estará en equilibrio si

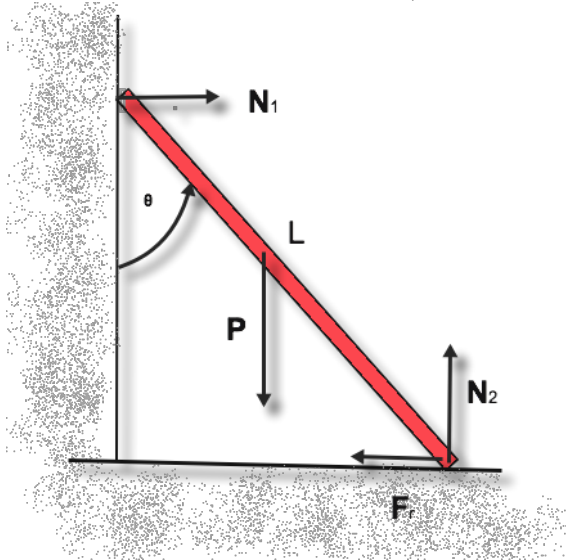
$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{iNeta}^{ext} = \mathbf{0}$$

esto permite elegir el punto respecto del cual tomar el torque en forma conveniente.

Ejemplo 2

Una escalera homogénea de masa M y longitud L esta apoyada sobre una pared sin roce, si el coeficiente de roce entre el piso y la escalera es μ_e determinar el ángulo máximo que podrá formar la misma con la vertical para que no se caiga. Se debe cumplir (tomemos torques respecto al punto de contacto con el piso)



$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} = \mathbf{0}$$

$$-Mg + N_2 = 0$$

$$N_1 - F_r = 0$$

$$F_r = N_2\mu$$

$$N_1 - N_2\mu = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{iNeta}^{ext} = \mathbf{0}$$

$$-N_1 L \sin(90^\circ + \theta) + Mg \frac{L}{2} \sin(180^\circ - \theta) = 0$$

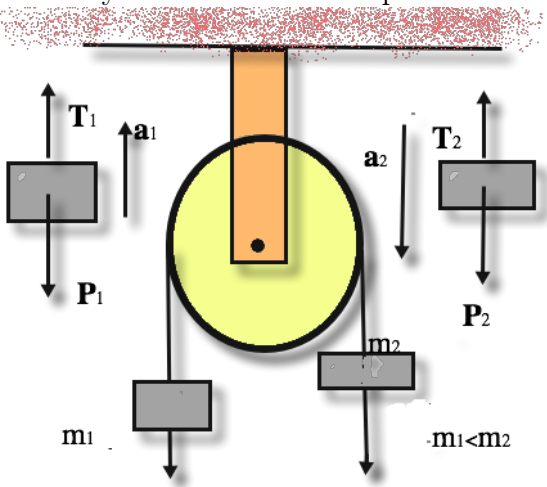
$$-N_1 \cos\theta + Mg \frac{L}{2} \sin\theta = 0$$

de donde podemos obtener

$$\begin{aligned}
 N_2 &= Mg \\
 N_1 &= Mg\mu \\
 \text{tang}(\theta) &= \frac{2Mg\mu}{Mg} = 2\mu \leq 2\mu_e \\
 \text{tang}(\theta) &\leq 2\mu_e
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Ahora analizaremos la maquina de Atwood sin considerar que la masa de la polea es nula, con lo que tendrá una inercia frente a rotaciones. Si mantenemos la aproximación de que el eje no presente roce y la cuerda sea inextensible y no resbale sobre la polea.



Las ecuaciones de movimiento serán ahora ($a_1 = -a_2 = a$ por no resbalar la cuerda y ser inextensible)

$$\begin{aligned}
 T_1 - m_1g &= m_1a \\
 T_2 - m_2g &= m_2(-a) \\
 (T_1 - T_2)R &= I\alpha = MR^2/2(-a/R),
 \end{aligned}$$

donde hemos usado la conexión $R\alpha = -a$ ya que no hay deslizamiento entre la cuerda y la polea. Ahora reemplazando las tensiones, que ahora son diferentes porque hay que poner a mover la polea masiva tendremos

$$\begin{aligned}
 m_1(a + g) - m_2(-a + g) &= -aM/2 \\
 a &= \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + M/2}g \\
 T_1 &= \frac{2m_1m_2 + M/2}{m_2 + m_1 + M/2}g \\
 T_2 &= \frac{2m_1m_2 - M/2}{m_2 + m_1 + M/2}g
 \end{aligned}$$

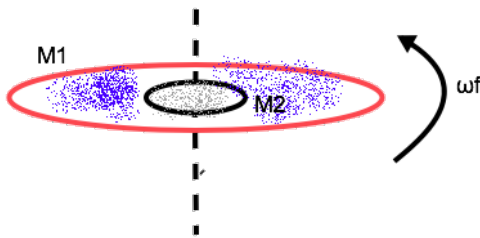
que puede compararse con el resultado anteriormente obtenido para la polea de masa despreciable donde las tensiones eran iguales.

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g$$

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_2 + m_1}g.$$

Ejemplo 4

Un disco de masa M_1 y radio R_1 se encuentra girando a una velocidad ω_i respecto de un eje vertical que pasa por su centro, en un dado instante se introduce por el eje un segundo disco de masa M_2 y radio R_2 , si suponemos que no hay roce con el eje, cuál será la velocidad angular final en comparación con la inicial?



Dado que al no haber roce no tendremos torque neto externo el momento angular total se conserva y tendremos usando la ditividad de momentos de inercia respecto al mismo eje

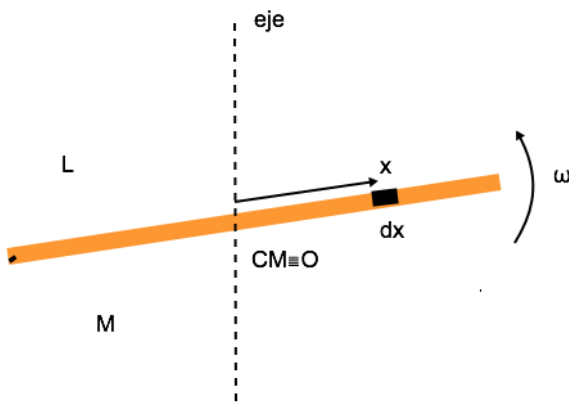
$$L_i = I_1\omega_i\mathbf{k}$$

$$L_f = (I_1 + I_2)\omega_f\mathbf{k}$$

$$L_i = L_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i = \frac{M_1R_1^2}{M_1R_1^2 + M_2R_2^2}\omega_i < \omega_i.$$

Ejemplo 5

Calculemos el momento de inercia de una varilla delgada homogénea de masa M y longitud L , girando alrededor de un eje perpendicular a la varilla que pasa por su centro que a su vez es su CM



siendo la varilla delgada y homogénea podemos pensar que tiene una densidad lineal de masa constante $\rho(x) = \frac{M}{L}$ y podemos calcular su momento de inercia como el de un cuerpo contínuo

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \rho(x)x^2dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{ML^2}{12},$$

como mencionamos antes. Si quisieramos calcular su momento de inercia respecto a un eje pasando por un extremo deberiamos resolver

$$I = \int_0^L \rho(x)x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{ML^2}{3},$$

y comprobamos que se cumple el teorema de Steiner

$$I_{extremo} = I_{CM} + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = ML^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{ML^2}{3}.$$