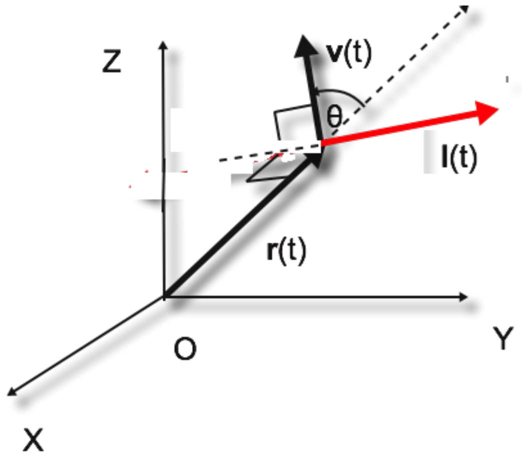
8 Rotaciones

8.1 Momento angular

Queremos definir para una partícula una magnitud que conecte el vector posición $\mathbf{r}$ y su vector velocidad $\mathbf{v}$ que llamaremos cantidad de movimiento angular o momento angular $\mathbf{l}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t))$. Notemos que esta magnitud vectorial es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ (o $\mathbf{v}$), su sentido lo da la regla de la mano derecha (que mencionamos cuando repasamos el producto vectorial al comienzo del curso) y su módulo depende tanto de la distancia de la partícula al orígen, el módulo su velocidad, su masa y del ángulo formado por el vector posición y la velocidad $\mathrm{l} = m\mathrm{r}\mathrm{v}sen\theta$

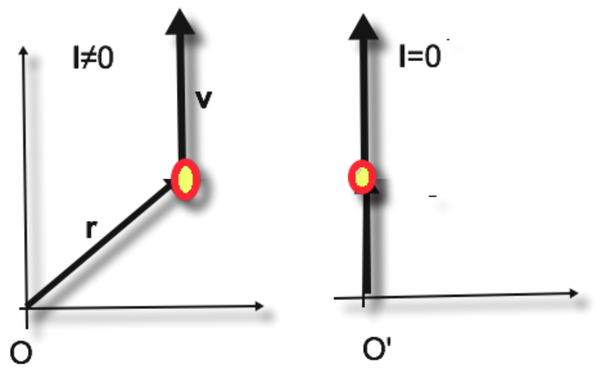


Es importante a hacer alguna observaciones respecto al momento angular

- Puede calcularse usando un determinante donde en la primera fila ubicamos a los versores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, en la 2da x, y, z (componentes de $\mathbf{r}$) y en la 3ra v_x, v_y, v_z (componentes de $\mathbf{v}$)

$$\mathbf{l} \;=\; \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = (yv_z - zv_y)\hat{\imath} - (xv_z - zv_x)\hat{\jmath} + (xv_y - yv_x)\hat{k}$$

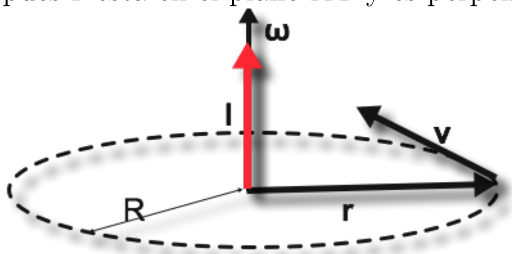
- Depende del sistema de referencia por ejemplo una partícula con velocidad constante puede tener momento angular nulo o no dependiendo de como se elijan los ejes coordenados



- Es una cantidad relacionada con las rotaciones, pues supongamos tener una partícula realizando un movimiento circular en un plano XY y supongamos colocar el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia trayectoria, entonces tendremos($\boldsymbol{\omega}(t) = \omega\hat{k}$) y usando la identidad $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$ tendremos

$$\mathbf{l}(t) = m\mathbf{r}(t)\times\mathbf{v}(t) = m\mathbf{r}(t)\times(\omega(t)\times\mathbf{r}(t)) = mR^2\boldsymbol{\omega}(t) - \cancelto{0}{\mathbf{r}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t)}\mathbf{r}(t)$$

pues $\mathbf{r}$ esta en el plano XY y es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ como se ve en la siguiente figura



donde vemos que $\mathbf{l} = mR^2\boldsymbol{\omega}$ y es proporcional, con una constante de proporcionalidad $\mathrm{I} = \mathrm{mR}^2$ llamada momento de inercia de la partícula, a la velocidad angular.

8.2 Momento de una fuerza o torque

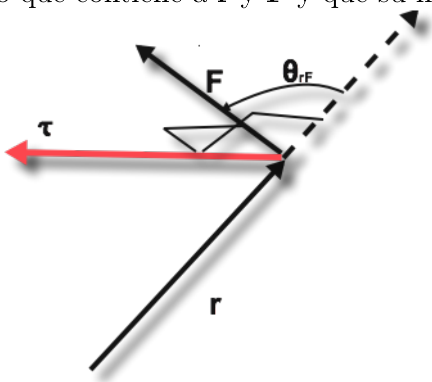
Ya vimos que el momento angular esta relacionado con las rotaciones y asi como en la 2da Ley de Newton la variación de la cantidad de movimiento está generada por la fuerza neta, quisieramos saber quien es responsable de la variación temporal del momento angular. Tomemos la derivada respecto al tiempo y tratémosla como la derivada de un producto

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \cancelto{0}{\mathbf{v}\times\mathbf{p}} + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_N,$$

donde hemo tenido en cuenta que la cantidad de movimiento y la velocidad son colineales y hemos aplicado la segunda Ley de Newton, asi descubrimos que

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_N,\ \boldsymbol{\tau}_N \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{F}_N,$$

y al vector $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ se lo denomina torque de la fuerza $\mathbf{F}$ donde $\mathbf{r}$ es el vector posición del punto de aplicación de la fuerza que en este caso es sobre una partícula. Notemos que el torque es, según su definición, perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ y que su módulo $\tau = \mathrm{rF}sen\theta_{\mathbf{rF}}$ depende de los modulos y del ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$.



Algunas observaciones son importantes

- Notemos que cuando $\theta_{\mathbf{rF}} \neq 0, 180^0$ la fuerza tiende a generar una rotación del vector $\mathbf{r}$, mientras que cuando $\theta_{\mathbf{rF}} = 0, 180^0$ produce un estiramiento o compresión del vector posición y allí el torque vale cero.

- Cuando $\mathrm{r} = R = cte$ tenemos una partícula en movimiento circular y allí vimos que $\mathbf{l} = mR^2\boldsymbol{\omega}$ y por lo tanto

$$\boldsymbol{\tau}_N = \frac{d\mathbf{l}}{dt} \quad = \quad mR^2\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathrm{I}\boldsymbol{\alpha},$$

vemos cierta similitud con la 2da ley de Newton pero ahora la fuerza neta fue reemplazado por el torque de dicha fuerza neta, la masa por el momento de inercia de la partícula y la aceleración lineal por la aceleración angular. Notemos que la inercia frente a rotaciones no depende sólo de la masa sino también de la distancia de dicha masa al eje de rotación.

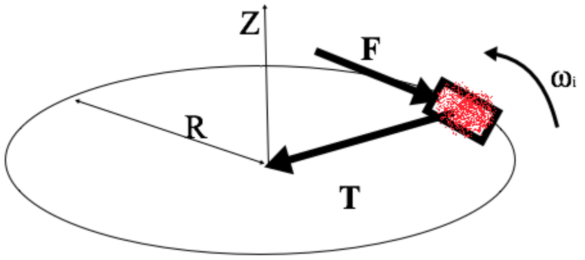
- Notemos que por su definición, el torque que produce la fuerza neta es

$$\boldsymbol{\tau}_N \quad = \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F}_N = \mathbf{r} \times \sum_k \mathbf{F}_k = \sum_k \mathbf{r} \times \mathbf{F}_k = \sum_k \boldsymbol{\tau}_k,$$

o sea es la suma de los torques individuales de cada fuerza actuante sobre la partícula, por esto lo llamamos también torque neto.

Ejemplo:

Un bloque de masa $m = 5kg$ está girando, obligado por una cuerda tensa, en una trayectoria circular de radio $R = 0.5m$ con una velocidad inicial de $5rev/seg$ sobre una mesa sin roce. En un momento dado se aplica una fuerza tangente a la trayectoria y constante en módulo $\boldsymbol{F}$ deteniendose el bloque al cabo de 30 segundos. Determinar la aceleración angular y el módulo de la fuerza $\boldsymbol{F}$.



$$\begin{aligned}
\alpha \quad &= \quad \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{0 - 5rev/seg}{30}seg = -\frac{1}{6}rev/seg^2 = \frac{-2\pi}{6}1/seg^2 \\
\boldsymbol{\tau}_N \quad &= \quad \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{T} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = I\alpha\hat{k} \\
\boldsymbol{\tau}_N \quad &= (\quad 0 + RFsen270^0)\hat{k} = 5kg\,(0.5m)^2\left(-\frac{\pi}{3}1/seg^2\right)\hat{k} \\
&= \quad -0.5mF = -1.31Nm \Rightarrow F = 2.62N
\end{aligned}$$

8.3 Rotaciones en un sistema de partículas

Podemos extender ahora el concepto de momento angular a un sistema de partículasy por similitud con la cantidad de movimiento definamos el momento angular del sistema como la suma de los individuales

$$\mathbf{L} \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

donde ahora cada vector posición y fuerza neta estan rotulados para cada i-esima partícula del sistema. De igual manera tendremos como hicimos antes para un partícula

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto},$$

donde nuevamente recordamos que $\mathbf{F}_{iN} = \sum_{k=1,k\neq i}^{N} \mathbf{F}_{ik} + \sum_k \mathbf{F}_{ik}^{ext}$ pues puede haber también fuerzas externas al sistema(en la segunda suma podriamos pensar que el infice k se refiere a partículas externas). De allí podemos separar

$$\boldsymbol{\tau}_{iN} = \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_{k(ext)} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}^{ext} \equiv \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{int} + \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext},$$

el torque neto sobre cada partícula es el torque neto debido a fuerzas internas y externas. Ahora notemos la siguiente propiedad importante, consecuencia del principio de acción y reacción y de tener fuerzas centrales (así lo asumimos pero podria ser que no)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{int} = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{F}_{ij} &= \mathbf{r_1} \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r_1} \times \mathbf{F}_{13} + ... + \mathbf{r_2} \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r_2} \times \mathbf{F}_{23} + ... \\ &= \mathbf{F}_{12} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \mathbf{F}_{13} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + ...\end{aligned}$$

donde hemos usado el principio de acción y reacción para cada par de partículas $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31}, ...$ademas si las fuerzas se dirijen en la recta que une a las partículas $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \,||\, \mathbf{F}_{12}, (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \,||\, \mathbf{F}_{13}, ...$ y por lo tanto como los productos vectoriales entre vectores paralelos dan cero y así

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{int} = \mathbf{0}$$

con lo que sólo sobreviven los torques generados por fuerzas externas al sistema. Esto es similar a lo sucedido cuando calculabamos la variación temporal de la cantidad de movimiento total del sistema donde sólo sobrevivian las fuerzas externas, tendremos entonces

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext},\ \boldsymbol{\tau}_{iNeto}^{ext} = \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}^{ext}, \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{iNeto}^{ext},\ \boldsymbol{F}_{iNeto}^{ext} = \sum_k \mathbf{F}_{ik}^{ext}.\end{aligned}}$$

De esta manera tanto la evolución temporal de la cantidad de movimiento total del sistema y el momento angular total queda fijada por las interacciones externas al sistema. Ahora, nosotros vimos que se podía escribir $\mathbf{P} = M\mathbf{V}_{CM}$, y podriamos intentar ver si podemos conectar el momento angular total ahora con el CM también, entonces pasemos del LAB al CM usando

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_{CM}(t) + \mathbf{R}_{CM}(t) \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_{CM}(t) + \mathbf{V}_{CM}(t)\end{aligned}$$

con lo que tendremos haciendo esta transformación de coordenadas

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\mathbf{r}_{iCM} + \mathbf{R}_{CM}) \times (\mathbf{v}_{iCM} + \mathbf{V}_{CM})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_{iCM} \times \mathbf{v}_{iCM}) + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_{iCM}\right) \times \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{R}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_{iCM}\right) + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{V}_{CM} \\
&= \mathbf{L}_{CM} + M(\cancelto{0}{\mathbf{R}_{CM,CM}} \times \mathbf{V}_{CM}) + M(\mathbf{R}_{CM} \times \cancelto{0}{\mathbf{V}_{CM,CM}}) + M(\mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{V}_{CM}) \\
&= \mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_{CM} \equiv \mathbf{L}_{orb} + \mathbf{L}_{int},
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que tanto la posición como la velocidad del CM respecto al CM es nula y asi vemos que el momento angular total se descompone en una parte que correspondería a una partícula ficticia de mas M que se mueve con el CM más el momento angular del sistema calculado respecto a CM que suelen llamarse orbital e interno o intrínseco respectivamente. Finalmente teniendo en cuenta que

$\frac{d\mathbf{L}_{orb}}{dt} = \frac{d(\mathbf{R}_{CM}\times\mathbf{P})}{dt} = \cancelto{0}{\mathbf{V}_{CM} \times \mathbf{P}} + \mathbf{R}_{CM} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}^{ext}_{iNeta}\right) = \mathbf{R}_{CM} \times \boldsymbol{a}_{CM}$,deberemos tener

$$
\boxed{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}^{ext}_{iNeto} = \sum_{k} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}^{ext}_{ik} = \mathbf{R}_{CM} \times \boldsymbol{a}_{CM} + \frac{d\mathbf{L}_{int}}{dt}}
$$

Notemos que si $\boldsymbol{a}_{CM} = 0$, con lo cual el sistema de CM sería inercial, se cumplirá

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{k} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}^{ext}_{ik} &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k} \mathbf{r}_{CMi} \times \mathbf{F}^{ext}_{ik} + \boldsymbol{R}_{CM} \times \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k} \mathbf{F}^{ext}_{ik}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}^{ext}_{CMiNeto} \\
\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}^{ext}_{CMiNeto} &= \frac{d\mathbf{L}_{int}}{dt},
\end{aligned}
$$

que no es más que la misma anterior que se obtenia en el sistema inercial de laboratorio. Otro caso especial donde se desacoplan la parte orbital de la intrinseca es cuando $\boldsymbol{a}_{CM} = cte$, y además $\boldsymbol{R}_{CM} = \boldsymbol{a}_{CM}t$ es decir tenemos que la sumatoria de fuerzas externas es constante describiendo el CM un MRUV y como $\mathbf{R}_{CM} \times \boldsymbol{a}_{CM} = \boldsymbol{a}_{CM} \times \boldsymbol{a}_{CM}t = 0$, es decir el CM no rota y tendremos

$$
\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}^{ext}_{iNeto} = \frac{d\mathbf{L}_{int}}{dt}.
$$

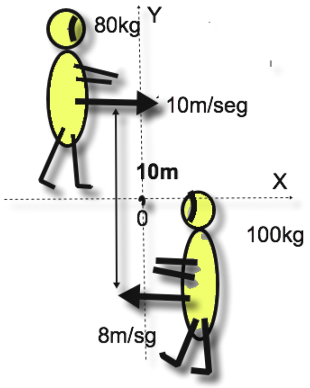
Notemos que cuando $\sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}^{ext}_{ik} = \mathbf{0}$ o sea la suma de todos los torques externos da cero entonces

$$
\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{cte},}
$$

y tenemos nuestra tercera ley de conservación, la del momento angular del sistema. Esto no implica que no haya fuerzas externas, que en ese caso no habria torque externo, sino que las suma de los torques den cero. En el caso de las fuerzas centrales externas que cumplen $\mathbf{F}^{ext}_{iNeta} || \mathbf{r}_i$ los torques también dan cero. Un ejemplo es la fuerza gravitacional entre dos cuerpos.

Ejemplo

Dos astronautas (considerados como un sistema de partículas) estan alejados de cualquier planeta $\sum_{i=1}^{N=2} \mathbf{F}_{iNeta}^{ext} \approx \mathbf{0}$ y se acercan uno a otro con velocidad constante como muestra la figura. En el momento que pasan uno frente a otro uno arroja una cuerda , el otro la agarra y el primero pega un tiron durante 0.1seg de $200N$. Determinar que tipo de movimiento tiene el CM y la velocidad de c/u después del tirón. Que sucede con el momento angular total?



La velocidad del CM debe ser constante pues la fuerza neta externa es cero y la cantidad de movimiento del sistema $\mathbf{P} = M\mathbf{V}_{CM}$ debe mantenerse constante. Tomemos el eje x con origen en el punto medio de ambas trayectorias iniciales y paralelo a ellas y sentido positivos hacia la derecha, con esto

$$V_{CMx} = \frac{80kg \times 10m/seg - 100kg \times 8m/seg}{180kg} = 0m/seg$$

y el CM esta quieto con lo que su posición no cambiará en el tiempo. Para determinar dicha posición lo podemos hacer en cualquier momento y si lo hacemos justo cuando pasan uno frente a otro tendremos

$$\begin{aligned} X_{CM} &= \tfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{0m \times 80kg + 0m \times 100kg}{180kg} = 0m \\ Y_{CM} &= \tfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \quad \frac{5m \times 80kg - 5m \times 100kg}{180kg} = -0.55m \end{aligned}$$

y luego del tirón seguirá estando en $(0, -0.55m)$. Si suponemos que la fuerza fue constante durante el tirón tendremos después tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1' &= (v_1 \Delta t, d/2 - 1/2(F/m_1)\Delta t^2) = (1m, 4.99m) \\ \mathbf{r}_2' &= (v_2 \Delta t, -d/2 + 1/2(F/m_2)\Delta t^2) = (-0.8m, -4.99m) \\ \mathbf{v}_1' &= (v_1, -F/m_1 \Delta t) = (10m/seg, -0.025m/seg) \\ \mathbf{v}_2' &= (v_2, F/m_2 \Delta t) = (-8m/seg, 0.01m/seg) \end{aligned}$$

de donde hemos calculado las posiciones y velocidades luego del tirón usando cinemática notemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{CM}' &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1' + m_2 \mathbf{r_2'}}{M} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + d/2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = (0m, -0.55m), \\ \mathbf{V'}_{CM} &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v_2'}}{M} = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2) + 0}{m_1 + m_2} = (0m/seg, 0m/seg) \end{aligned}$$

como se vió antes. Finalmente

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L} = m_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) + m_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2) m_1 \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & d/2 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & -d/2 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= (0, 0, -m_1 v_1 d/2 + m_2 v_2 d/2) \\
= 0, 0, -4000 Nmseg - 4000 Nmseg) &= (0, 0, -8000 Nmseg) \\
\mathbf{L}' = (0, 0, -7998 Nmseg) &\approx \mathbf{L}
\end{aligned}
$$

como puede comprobarse y mejor es la coincidencia cuando menor es el intervalo donde actua la fuerza, pues a pesar de ser interna esta es sólo central y constante en un intervalo muy corto.