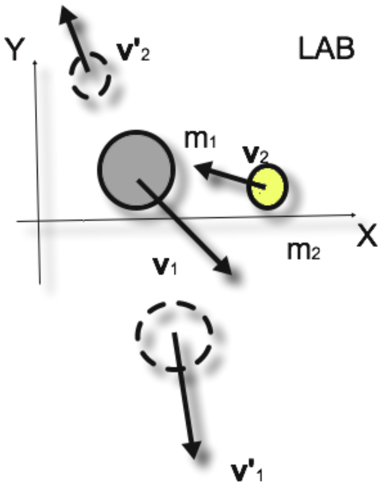
7.3 Colisiones

Una de las aplicaciones importantes de lo visto para sistema de partículas es el proceso de choque donde un conjunto de partículas inicialmente libres (sin interacción mutua) interactuan o ”chocan” con otro conjunto de partículas en una región restringida del espacio y luego siguen libres. Por simplicidad estudiaremos un sistema de dos partículas, seguramente alguna vez hemos jugado al billar o al tejo sobre alguna superficie bien lisa, o también hemos visto chocar dos bolas de plastilina. Supondremos un problema bidimensional también por simplicidad y porque muchas aplicaciones se dan en el plano.

7.4 Colisiones en el sistema de laboratorio(LAB)

Las partículas antes de colisionar tienen $\mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}) = (\mathrm{v}_1 cos\theta_1, \mathrm{v}_1 sen\theta_1)$, $\mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}) = (\mathrm{v}_2 cos\theta_2, \mathrm{v}_2 sen\theta_2)$ y luego de chocar siguen con velocidades $\mathbf{v}'_1 = (v'_{1x}, v'_{1y}) = (\mathrm{v}'_1 cos\theta'_1, \mathrm{v}'_1 sen\theta'_1)$, $\mathbf{v}_2 = (v'_{2x}, v'_{2y}) = (\mathrm{v}'_2 cos\theta'_2, \mathrm{v}_2 sen\theta'_2)$



donde los ángulos se miden como siempre respecto al semieje positivo de las X con signo positivo en sentido antihorario. Ahora si no existen fuerzas externas sobre este sistema o estas se compensan en todo momento la cantidad de movimiento del sistema deberá conservarse durante el choque es decir

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \mathbf{P}' \\
\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} &= \mathbf{p'_1} + \mathbf{p'_2} \\
m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 &= m\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2
\end{aligned}
$$

que equivale a dos ecuaciones escalares sobre cada uno de los ejes coordenados

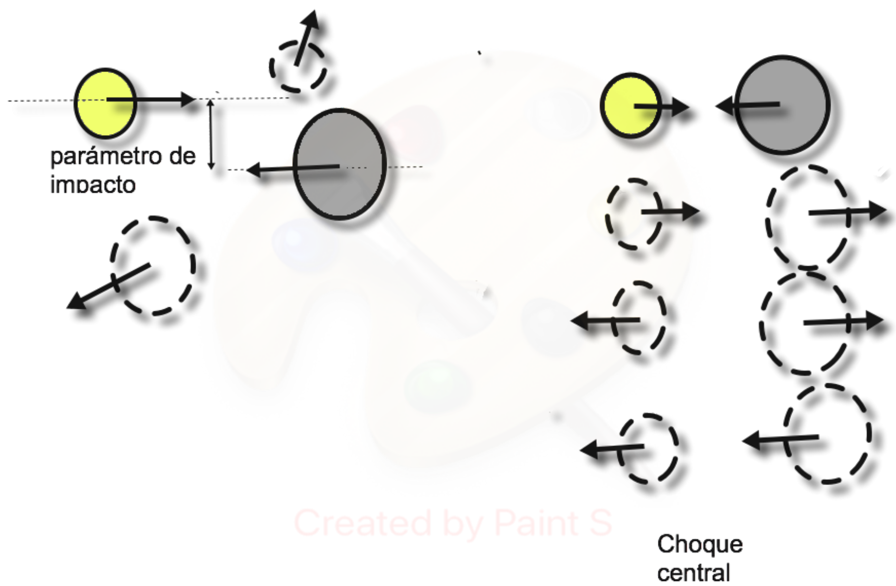
$$
\begin{aligned}
m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= m_2 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\
m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} &= m_2 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}
\end{aligned}
$$

o en términos de módulos y ángulos

$$
\begin{aligned}
m_1 \mathrm{v}_1 cos\theta_1 + m_2 \mathrm{v}_2 cos\theta_2 &= m_2 \mathrm{v}_1{}' cos\theta'_1 + m_2 \mathrm{v}_2{}' cos\theta'_2 \\
m_1 \mathrm{v}_1 sen\theta_1 + m_2 \mathrm{v}_2 \cos\theta_2 &= m_2 \mathrm{v}_1{}' sen\theta'_1 + m_2 \mathrm{v}_2{}' sen\theta'_2
\end{aligned}
$$

donde si nos dieran como datos las velocidades iniciales y masas de las partículas sería un sistema de 2 ecuaciones con 4 incognitas que son los módulos de las velocidades finales y los ángulos de salida en LAB. De manera que o nos dan algun datos sobre el estado final (por ejemplo un módulo y un ángulo) o no podremos resolverlo en LAB. Primeramente simplifiquemos las cosas, considerando que antes del choque ambas partículas se movian al lo largo del eje X. Además consideramos un choque central, es decir que las partículas antes y después del choque salen están en la misma dirección como sucede en un choque frontal de dos bolas de billar que se da cuando el parámetro de impacto, distancia entre los centros es cero. Asi tendremos $\theta_{1,2} = 0, 180^0, \theta'_{1,2} = 0, 180^0$, y en la ecuación interpretamos a v$cos\theta \equiv v$ la componente x con su signo correspondiente. Tendremos una sóla ecuación a lo largo del eje X

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad = \quad m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$



Vemos que se conocen todos los elementos del primer miembro, tenemos dos incognitas $v'_{1,2}$ en el segundo y sólo una ecuación. Por lo tanto si no agregamos alguna otra condición no podremos conocer la velocidades después del choque. Es aqui donde agregamos la conservación de la energía y hablamos de **choque elástico**. Si suponemos que se conserva la energía mecanica durante el choque tendremos antes y después del mismo, donde suponemos que no hay interacción y por lo tanto tampoco energia potencial

$$\begin{aligned} E_M &= E'_M \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2, \end{aligned}$$

donde para que esto se dé no debe haber cambio en la energías internas de las partículas, ya que por ejemplo en el choque entre dos cuerpos deformables parte de la energía cinética inicial se usará en deformar los cuerpos. Asi tendremos dos ecuaciones con dos incognitas para el choque elástico

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_2 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2, \end{aligned}$$

que pueden simplificarse facilmente si pasamos del lado izquiero todo lo que depende de la partícula 1 y del derecho todo de la 2

$$\begin{aligned}
m_1(v_1 - v_1') &= -m_2(v_2 - v_2') \\
\frac{1}{2}m_1(v_1^2 - v_1'^2) &= -\frac{1}{2}m_2(v_2^2 - v_2'^2) \\
\frac{1}{2}m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') &= -\frac{1}{2}m_2(v_2 - v_2')(v_2 + v_2')
\end{aligned}$$

y haciendo el cociente de la tercera con la primera y cancelando el factor 1/2 obtenemos

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

que es lineal en vez de cuadrática como la de la energía, asi ahora nos queda por resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned}
m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\
v_1 - v_2 &= v_2' - v_1'
\end{aligned}$$

con solución

$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2, \; v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2}$$

y dependiendo de las velocidades iniciales y las masas se nos presentan diferentes situaciones.

Ejemplo

Una partícula con velocidad inicial $v_1 = 10m/seg$ y de masa $m_1 = 2kg$ choca con otra de igual masa $m_2 = 2kg$ que se encontraba en reposo. Si suponemos el choque elástico, cuales serán las velocidades de cada partícula luego del choque? Si aplicamos las ecuaciones halladas tendremos

$$v_1' = 0 \times v_1 + 1 \times 0 = 0m/seg, \; v_2' = 1 \times 10m/seg + 0 \times 0 = 10m/seg$$

con lo que la primer partícula se queda quieta después del choque y la segunda adquiere la velocidad de la primera y tenemos así un choque de intercambio que suele verse en el juego de billar. Mencionemos de paso que en dicha situación el peso de cada bola es compensado con la normal de la mesa y a la fuerza de roce presente la despreciamos para los cortos trayectos que recorren las bolas. De esta manera tenemos aproximadamente una situación con sumatoria de fuerzas externas nula y podemos aplicar conservación de la cantidad de movimiento. Las bolas son suficientemente duras para deformarse y así tendremos un choque elástico.

La otra situación que puede presentarse es la de choque inelástico donde parte de la energía cinética inicial se transforma en energía interna de las partículas finales porque por ejemplo se han deformado o calentado durante el choque, y ya no podemos asumir la conservación de la energía mecánica. Resolver el problema sin datos adicionales no será posible pero existe la situación del llamado **choque perfectamente inelástico** donde las partícula emergen juntas, que puede resolverse. Lo importante es observar que a pesar de no conservarse la energía mecánica, se sigue conservando la cantidad de movimiento total porque la sumatoria de fuerzas externas sigue dando cero. Tendremos

$$
\begin{aligned}
m_1 v_1 + m_2 v_2 &= (m_1 + m_2) V \\
V &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},
\end{aligned}
$$

notemos que la energía mecánica final es ahora

$$
\begin{aligned}
E'_M &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1 + m_2} v_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 v_2
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E'_M - E_M &= \frac{1}{2}\frac{\cancel{m_1^2} - m_1 m_2 - \cancel{m_1^2}}{m_1 + m_2} v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\cancel{m_2^2} - m_1 m_2 - \cancel{m_2^2}}{m_1 + m_2} v_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 v_2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(-v_1^2 - v_2^2 + 2 v_1 v_2) = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2)^2 < 0
\end{aligned}
$$

lo que indica una disminución en la energía mecánica.

Finalmente mencionemos que el problema de desintegración de una partícula en otras (dos o más) podría estudiarse como un choque perfectamente inelástico a la inversa, pues inicialmente tenemos a las partículas juntas con la misma velocidad y luego se desintegra el conjunto incial adquiriendo cada partícula una determinada velocidad. Aqui podemos seguir planteando la conservación de la cantidad de movimiento del sistema siempre y cuando no actuen fuerzas externas durante la desintegración.

7.5 Choques en CM

Ya hemos mencionado que cuando hay conservación de la cantidad de movimiento del sistema como esta se expresa como $\mathbf{P} = M\mathbf{V}_{CM} = \mathbf{cte}$ entonces $\mathbf{V}_{CM}$ es constante y podemos colocar un sistema de referencia inercial en CM. Como la velocidad del CM respecto a si mismo es cero se cumplirá $\mathbf{P}_{CM} = \mathbf{P}'_{CM} = \mathbf{0}$ y esto es general sin importar la caracteristica del choque. O sea en CM tendremos

$$
\begin{aligned}
m_1 \mathbf{v}_{1CM} + m_2 \mathbf{v}_{2CM} &= \mathbf{0}, \quad m_1 \mathbf{v}'_{1CM} + m_2 \mathbf{v}'_{2CM} = \mathbf{0} \\
\mathbf{v}_{2CM} = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_{1CM} &\quad , \quad \mathbf{v}'_{2CM} = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}'_{1CM}
\end{aligned}
$$

o sea las partícula se veran acercarse a lo largo de cierta dirección con velocidades opuesta y después del choque alejarse en una dirección que forma cierto ángulo θ respecto a la dirección original y con velocidades opuestas. Más aún cuando el choque es elástico

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_{1CM}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathrm{v}_{2CM}^2 &= \frac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_{1CM}^{\prime 2} + \frac{1}{2} m_2 \mathrm{v}_{2CM}^{\prime 2}, \\
\cancel{\frac{1}{2}(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2})} \mathrm{v}_{1CM}^2 &= \cancel{\frac{1}{2}(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2})} \mathrm{v}_{1CM}^{\prime 2} \\
\mathrm{v}_{1\mathrm{CM}} &= \mathrm{v}'_{1CM} \\
\mathrm{v}_{2\mathrm{CM}} &= \mathrm{v}'_{2CM}
\end{aligned}
$$

o sea los módulos de las velocidades de cada partícula se conservan. De lo que no tenemos información a partir de las ecuaciones planteadas, es del ángulo θ salvo que supongamos que el choque es central, pues ese ángulo dependerá del tipo de interacción específica entre las partículas.