6.2 Energética

Ya hemos calculado el trabajo en contra de la fuerza del resorte para obtener la energía potencial elástica y obtuvimos

$$U_k(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

donde pusimos el origen donde el resorte no está estirado ni comprimido. Por otro lado para el péndulo la energía es la potencial gravitatoria para pequeñas oscilaciones

$$\begin{aligned} U_g(h) &= mgh = mg(l - lcos\theta) \\ cos\theta &\approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ U_g(h) &\approx \frac{1}{2}mgl\theta^2 \end{aligned}$$

donde hemos hecho una aproximación de 2do orden para pequeños ángulos en el coseno porque la de primer orden dá cero. Notemos las similitud entre ambas expresiones, la del resorte y la del péndulo cambiando $k \leftrightarrow mg/l$ pues debemos multiplicar y dividir por l en la energía potencial del pédulo para tener $l\theta$ ques es distancia análoga a x . Notemos que la energía mecánica del sistema tierra-resorte o tierra-péndulo se conserva porque el trabajo de las fuerzas no conservativas (la normal para el resorte y la tensión para el péndulo) es cero en ausencia de roce. Así

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = cte \\ E_M &= \frac{1}{2}m(l\frac{d\theta(t)}{dt})^2 + \frac{1}{2}mgl\theta(t)^2 = cte. \end{aligned}$$

y no es difícil comprobar que la energía mecánica se mantiene constante a lo largo del movimiento pues por ejemplo para el péndulo

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_{max}cos(\omega t + \delta) \\ l\frac{d\theta(t)}{dt} &= -l\omega\theta_{max}sen(\omega t + \delta) = -l\sqrt{\frac{g}{l}}\theta_{max}sen(\omega t + \delta) \\ E_M &= \frac{1}{2}mlg\theta_{max}^2(sen^2(\omega t + \delta) + cos^2(\omega t + \delta)) = \frac{1}{2}mlg\theta_{max}^2 \end{aligned}$$

que es una constante independiente del tiempo y sólo depende de la aplitud angular máxima de la que es soltado o llega el péndulo. Notemos que el periodo del péndulo es $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ depende de su longitud y de la aceleración de la gravedad del planeta donde oscila, asi en la luna que tiene una g menor oscilará más lento pues tendrá un mayor periodo.

Ejemplo1:

Un resorte de constante $k = 200N/m$ tiene atada una masa de $0.5kg$, quisieramos saber cual es la expresión de su posición en el tiempo cuando en $t = 0$ se la coloca en $x_0 = 0$ y se le da un empujón con velocidad $v_0 = 2m/seg$. Primeramente notemos que

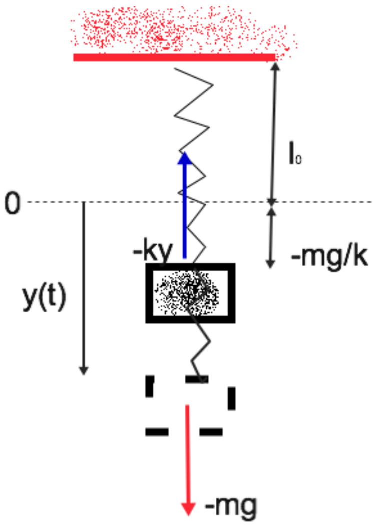
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{4m^2/seg^2}{\frac{200N/m}{0.5kg}}} = \sqrt{\frac{2}{200}m^2} = 0.1m = 10cm \\ \omega &= \sqrt{\frac{200N/m}{0.5kg}} = \frac{20}{seg} \end{aligned}$$

y que

$$\delta = arctg(\frac{\frac{-2m}{20}}{x_0})\overrightarrow{x_{0\to 0}} - \pi/2$$

y así tendremos $x(t) = 10cm\cos(\frac{20}{seg}t\text{-}\frac{\pi}{2})$. También quiseramos saber cuál es la energía total del sistema y según lo analizado anteriormente para el péndulo y haciendo el cambio $k, \theta_{max} \leftrightarrow mgl, A$ obtendremos $E_M = \frac{1}{2}kA^2 = 0.5 \times 200N/m \times 0.1^2 = 1Joule$.

Ejemplo 2:



Supongamos tener un peso de masa m colgado de un resorte de longitud l_0 y constante k fijado altecho. Plantear la ecuación de movimiento para ma masa y la expresión de su energía mecánica. Aplicando la 2da ley de Newton tendremos

$$\begin{aligned} -mg - ky &= m\frac{d^2y}{dt^2} \\ E_M &= \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + mgy + \frac{1}{2}ky^2, \end{aligned}$$

donde el $y = 0$ lo ponemos en el punto extremo inferior del resorte cuando está sin estirar (a l_0 del techo) y donde el sentido positivo se toma hacia arriba. Notemos que la energía potencial por el origen elegido puede dar negativa, pero ésto no importa pues lo esencial son las diferencias de energía. Notemos que si hacemos el cambio de variables $y \to Y = y + \frac{mg}{k}$ nos queda la ecuación de movimiento

$$-kY \quad = \quad m\frac{d^2Y}{dt^2},$$

que tiene la mísma solución de antes $Y = Acos(\omega t + \delta) \Rightarrow y(t) = -\frac{mg}{k} + Acos(\omega t + \delta)$. Notemos que $-\frac{mg}{k}$ es lo que se estira el resorte cuando el cuerpo se cuelga.