

tubo de Prandtl (a veces llamado también tubo de Pitot). La presión en la abertura 1 es la presión estática P y en la abertura 2 es $P + \frac{1}{2}\rho v^2$. La altura manométrica h_2 es proporcional a la diferencia entre estas, o sea a la presión dinámica $\frac{1}{2}\rho v^2$. Por tanto,

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho_m g h_2. \quad [15-14]$$

Este instrumento está encerrado en una caja y su indicación no depende de la presión atmosférica. Si se mantiene en reposo, puede utilizarse para medir la velocidad de la corriente de un fluido circulante que pasa por él. Si se monta sobre un avión, indica la velocidad del avión respecto al aire que lo rodea y se denomina anemómetro.

15-5. Flujo en un conducto curvo.—Cuando un fluido circula por un conducto curvo, como en la figura 15-11, ha de ejercerse sobre él una fuerza transversal para

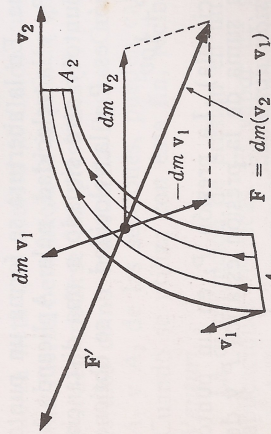


FIG. 15-11.—Diagrama vectorial para calcular la fuerza F ejercida por un fluido que circula en un conducto curvo.

cambiar la dirección de su movimiento. El sentido de esta fuerza es hacia el lado cóncavo de la curva, lo cual significa que la presión en el lado externo del conducto es superior a la del interno. Esto es, cuando los tubos de flujo son curvos, además de las diferencias de presión longitudinales ligadas a las variaciones de magnitud de la velocidad del fluido, existen diferencias de presión *transversales*. El resultado es que el fluido ejerce una fuerza transversal sobre las paredes del conducto.

Consideremos el conducto de la figura 15-11 como un solo tubo de flujo. La masa dm de fluido que entra o sale del conducto en el tiempo dt es

$$dm = \rho A_1 v_1 dt = \rho A_2 v_2 dt. \quad [15-15]$$

El vector cantidad de movimiento del fluido que entra es $dm v_1$ y el del fluido que sale, $dm v_2$. El *vector incremento* de la cantidad de movimiento será $dm(v_2 - v_1)$ y su *derivada*, que es igual a la fuerza F sobre el fluido, es

$$F = \frac{dm}{dt} (v_2 - v_1).$$

En virtud de la Ec. [15-15],

$$\frac{dm}{dt} = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2.$$

En la figura 15-11 se ha construido el diagrama vectorial para obtener la magnitud y dirección de F para el punto medio del conducto. Según la tercera ley de Newton, el fluido ejerce sobre las paredes del conducto una fuerza F' , de igual magnitud y sentido opuesto a F .

15-6. Viscosidad.—La viscosidad puede imaginarse que es el rozamiento interno de un fluido. A causa de la viscosidad, es necesario ejercer una fuerza para obligar a una capa líquida a deslizar sobre otra, o para hacer que una superficie deslice sobre otra cuando existe una capa de fluido entre ambas. Tanto los líquidos como los gases presentan viscosidad, aunque los primeros mucho más que los segundos. Al deducir las ecuaciones fundamentales que corresponden al movimiento de un fluido viscoso, se verá que el problema es muy análogo al que se refiere a la fatiga cortante y deformación unitaria por cizalladura de un sólido.

La figura 15-12 representa un tipo de aparato para medir la viscosidad de un líquido. Un cilindro está apoyado sobre cojinetes, que tienen rozamiento muy pequeño, de modo que puede girar dentro de un recipiente cilíndrico coaxial al primer cilindro. El líquido cuya viscosidad se desea medir se vierte en el espacio anular que queda entre los cilindros. Aplicando un par al cilindro interior mediante un sistema de poleas y pesos, este comienza a girar con movimiento acelerado durante algunos instantes, pero rápidamente alcanza una velocidad angular constante, y continúa girando a esta velocidad mientras actúa dicho par. Es evidente que esta velocidad será menor con un líquido tal como la glicerina en el espacio anular, que si el líquido utilizado es agua o petróleo. Conociendo el momento del par, las dimensiones del aparato y la velocidad angular, puede calcularse la viscosidad del líquido.

Para simplificar lo más posible el problema, imaginemos que los cilindros son aproximadamente del mismo tamaño, de modo que la capa líquida que queda entre ellos sea muy delgada. Un arco pequeño de

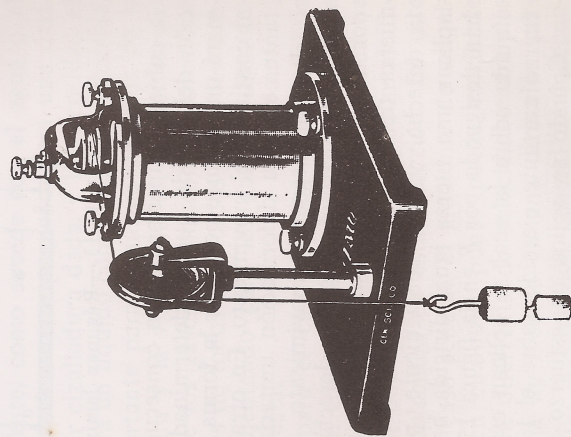


FIG. 15-12.—Tipo de viscosímetro. (Reproducido por cortesía de Central Scientific Co.)

esta capa puede considerarse aproximadamente como un segmento rectilíneo. La figura 15-13 representa una porción de la capa líquida comprendida entre la pared interior móvil y la pared exterior fija. Se encuentra que el líquido que está en contacto con la superficie móvil tiene la misma velocidad que esta superficie, mientras que el líquido adyacente a la pared fija permanece en reposo. La velocidad de las capas intermedias de líquido aumenta uniformemente de una pared a la otra, como indican las flechas.

Un régimen o flujo de este tipo se denomina *laminar*. Las capas de líquido deslizan unas sobre otras como lo hacen las hojas de un libro cuando está sobre una mesa y se aplica una fuerza horizontal a

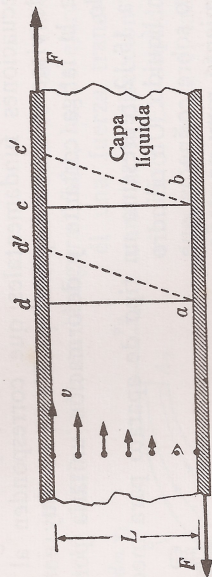


FIG. 15-13.—Régimen laminar de un líquido viscoso.

la cubierta superior. Como consecuencia de este movimiento, una porción del líquido que en determinado instante tiene la forma $abcd$, tomará un instante posterior la forma $abc'd'$, y se deformará cada vez más al continuar el movimiento. En otras palabras, el líquido aumenta constantemente su deformación unitaria por cizalladura.

Para mantener el movimiento, es necesario ejercer continuamente una fuerza dirigida hacia la derecha sobre la lámina superior móvil y, por tanto, indirectamente sobre la superficie superior del líquido. Esta fuerza tiende a arrastrar el líquido y también la lámina inferior hacia la derecha, y, por consiguiente, para mantenerla fija será necesario aplicar una fuerza igual dirigida hacia la izquierda. Ambas fuerzas se han designado por F en la figura 15-13. Si A es el área de la superficie líquida sobre la cual se aplican estas fuerzas, la razón F/A es el esfuerzo cortante ejercido sobre el líquido.

Cuando se aplica un esfuerzo cortante a un sólido, su efecto es producir un cierto desplazamiento del sólido, tal como dd' . Se define la deformación unitaria por cizalladura como la razón de este desplazamiento a la dimensión transversal L , y dentro del límite elástico el esfuerzo cortante es proporcional a la deformación unitaria por cizalladura. En un fluido, por el contrario, la deformación unitaria por cizalladura aumenta sin límite mientras se aplica el esfuerzo, y se puede demostrar experimentalmente que el esfuerzo no depende de la deformación unitaria por cizalladura sino de su *derivada*. En la figura 15-13, la deformación unitaria en el instante en que el volumen de fluido tiene

la forma $abc'd'$ es dd'/ad , o bien, dd'/L . Como L es constante, la derivada de la deformación unitaria es igual a $1/L$ multiplicado por la derivada de dd' , o sea la velocidad v de la pared móvil. Por tanto,

Derivada de la deformación unitaria por cizalladura $= \frac{v}{L}$

Se define el *coeficiente de viscosidad* del fluido, o simplemente su *viscosidad* η , como la razón del esfuerzo cortante, F/A , a la derivada de la deformación unitaria por cizalladura:

$$\eta = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{derivada de la deformación unitaria por cizalladura}} = \frac{F/A}{v/L},$$

o sea

$$F = \eta A \frac{v}{L} \quad [15-16]$$

Cuando el líquido fluye fácilmente, como sucede con el agua o el petróleo, el esfuerzo cortante es relativamente pequeño, para una derivada de la deformación unitaria por cizalladura dada, y la viscosidad es también relativamente pequeña. Para un líquido como melaza o glicerina, es necesario un mayor esfuerzo cortante para la misma derivada de la deformación unitaria por cizalladura y la viscosidad es, en correspondencia, mayor. Las viscosidades de los gases son mucho menores que las de los líquidos. Las viscosidades de todos los fluidos dependen acuosamente de la temperatura, aumentando para los gases y disminuyendo para los líquidos al crecer esta.

La Ec. [15-16] fue deducida para el caso especial en el cual la velocidad aumentaba en proporción constante con la distancia contada a partir de la lámina inferior. La expresión general de la derivada de la velocidad respecto al espacio, en una dirección perpendicular al flujo, se denomina *gradiente de la velocidad* en esta dirección. En este caso especial es igual a v/L . En el caso general, el gradiente de velocidad no es uniforme y su valor en cualquier punto puede escribirse como dv/dy , siendo dv la pequeña diferencia de velocidad entre dos puntos separados por una distancia dy medida en una dirección perpendicular a la del flujo. Por tanto, la expresión general de la ecuación [15-16] es

$$F = \eta A \frac{dv}{dy} \quad [15-17]$$

Las dimensiones de la viscosidad son las de una fuerza multiplicada por distancia y dividida por el producto de área por velocidad. Así, en el sistema cgs la unidad es 1 dina·cm/cm² × (cm/seg) = 1 dina·seg/cm²,

y se denomina *poise*, en honor del físico francés Poiseuille. Las viscosidades pequeñas se expresan en centipoises ($1 \text{ cp} = 10^{-2} \text{ poise}$) o en micropoises ($1 \mu\text{p} = 10^{-6} \text{ poise}$). En la tabla 15-1 figuran algunos valores típicos.

TABLA 15-1
Valores típicos de coeficientes de viscosidad

Temperatura °C	Viscosidad del aceite de ricino, poises	Viscosidad del agua, centipoises	Viscosidad del aire, micropoises
0	53	1,792	171
20	9,86	1,005	181
40	2,31	0,656	190
60	0,80	0,469	200
80	0,30	0,357	209
100	0,17	0,284	218

15-7. Ley de Poiseuille.—De la naturaleza general de los efectos de viscosidad resulta evidente que la velocidad de un fluido viscoso que circula a través de un tubo no es la misma en todos los puntos de una sección transversal. La capa de fluido más externa se adhiere a las paredes del tubo y su velocidad es nula. Las paredes del tubo ejercen una resistencia hacia atrás sobre esta capa, la cual, a su vez, tira hacia atrás de la capa próxima más interior que ella, y así sucesivamente.

Siempre que la velocidad no sea demasiado grande, el flujo es laminar, con una velocidad que es máxima en el centro del tubo y disminuye hasta anularse en las paredes. El flujo es análogo al movimiento de los tubos de un anteojo que deslizan entre sí, avanzando el central muy rápidamente mientras el exterior queda en reposo.

Consideremos una porción de un tubo de radio interior R y longitud L , a través del cual circula un líquido de viscosidad η en un flujo laminar (Fig. 15-14). Un pequeño cilindro de radio r se encuentra en equilibrio (moviéndose a velocidad constante) bajo la acción de la fuerza motora debida a la diferencia de presión entre sus extremos, y a la fuerza retardadora de viscosidad existente en su superficie exterior. La fuerza motora es

$$(P_1 - P_2) \pi r^2.$$

Según la Ec. [15-17], la fuerza de viscosidad es

$$-\eta A \frac{dv}{dr} = -\eta \times 2\pi r L \times \frac{dv}{dr},$$

siendo dv/dr el gradiente de velocidad a una distancia radial r del eje.

Es necesario introducir el signo menos porque v disminuye cuando r aumenta.

Igualando las fuerzas se obtiene

$$-dv = \frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r dr$$

cuya integración conduce a

$$-v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2 + C.$$

Pero dado que $v=0$ para $r=R$,

$$0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} R^2 + C$$

y, por consiguiente,

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2). \quad [15-18]$$

que es la ecuación de una parábola. La curva de la figura 15-14 (b) es una gráfica de esta ecuación. Las longitudes de las flechas son proporcionales a las velocidades en sus respectivas posiciones. El gradiente de velocidad, dv/dr , para un radio cualquiera, es la pendiente de esta curva medida respecto a un eje vertical. Decimos que el flujo tiene un *perfil de velocidades parabólico*.

Para hallar el gasto Q , o sea el volumen de fluido que atraviesa cualquier sección del tubo por unidad de tiempo, consideremos el ele-

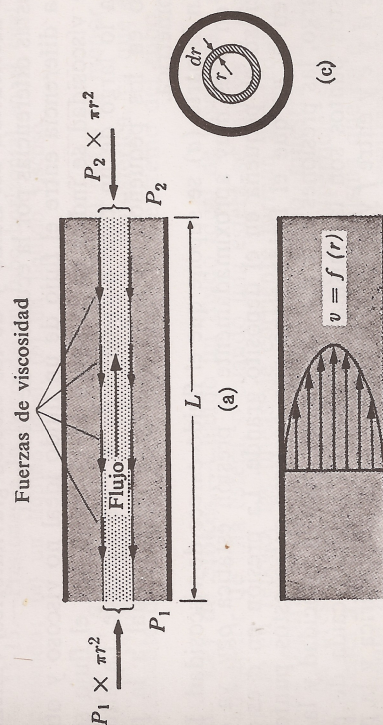


FIG. 15-14.—(a) Fuerzas que actúan sobre un elemento cilíndrico de un líquido viscoso. (b) Distribución de velocidades para un flujo viscoso.

mento de paredes delgadas de la figura 15-14 (c). El volumen dV de fluido que atraviesa los extremos de este elemento en un tiempo dt es $v dA dt$, siendo v la velocidad para un radio r y dA el área rayada, igual a $2\pi r dr$. Utilizando la expresión de v dada por la Ec. [15-18], se deduce que

$$dV = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \times 2\pi r dr \times dt.$$

El volumen que fluye a través de toda la sección se obtiene extendiendo la integración a todos los elementos comprendidos entre $r=0$ y $r=R$. Dividiendo por dt , resulta para el gasto Q ,

$$Q = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi}{8} \frac{R^4}{L} \frac{P_1 - P_2}{\eta} \quad [15-19]$$

Esta relación fue obtenida por primera vez por Poiseuille (en cuyo honor se dio nombre a la unidad de viscosidad) y se denomina *ley de Poiseuille*.

Como era de esperar, el gasto es inversamente proporcional a la viscosidad y directamente proporcional a la cuarta potencia del radio del tubo, de modo que si, p. ej., el radio se reduce a la mitad, el gasto queda reducido a la dieciséisava parte. La razón $(P_1 - P_2)/L$ es el *gradiente de presión* a lo largo del tubo. El gasto es también directamente proporcional al gradiente de presión, observándose que para un fluido viscoso hay una caída de presión incluso a lo largo de un tubo horizontal de sección constante. Si la sección varía de un punto a otro y el tubo no es horizontal, habrá además diferencias de presión resultantes de la aceleración del fluido y de los efectos gravitatorios, viniendo dadas estas diferencias por la ecuación de Bernoulli.

La diferencia entre el flujo de un fluido ideal no viscoso y otro que tiene viscosidad se indica en la figura 15-15, en la que el flujo se verifica a lo largo de un tubo horizontal de sección variable. La altura del fluido en los pequeños tubos verticales es proporcional a la presión manométrica.

En la parte (a) se supone que el fluido carece de viscosidad. La presión en b es muy aproximadamente la presión estática ρgy , ya que la velocidad es pequeña en el depósito grande. La presión en c es menor que en b , ya que el fluido tiene que acelerar entre estos puntos. Sin embargo, las presiones en c y d son iguales, pues la velocidad y la altura en estos puntos son las mismas. Se produce también caída de presión entre d y e y entre f y g . La presión en g es la atmosférica y la presión manométrica en este punto es nula.

La parte (b) del diagrama pone de manifiesto el efecto de la viscosidad. De nuevo, la presión en b es aproximadamente la presión estática ρgy . Hay una caída de presión entre b y c , debida en parte a los

efectos de viscosidad, y también se produce otra caída entre c y d . El gradiente de presión en esta porción del tubo está representado por la pendiente de la línea de trazos. La caída entre d y e se debe en parte a la aceleración y en parte a la viscosidad. El gradiente de presión entre

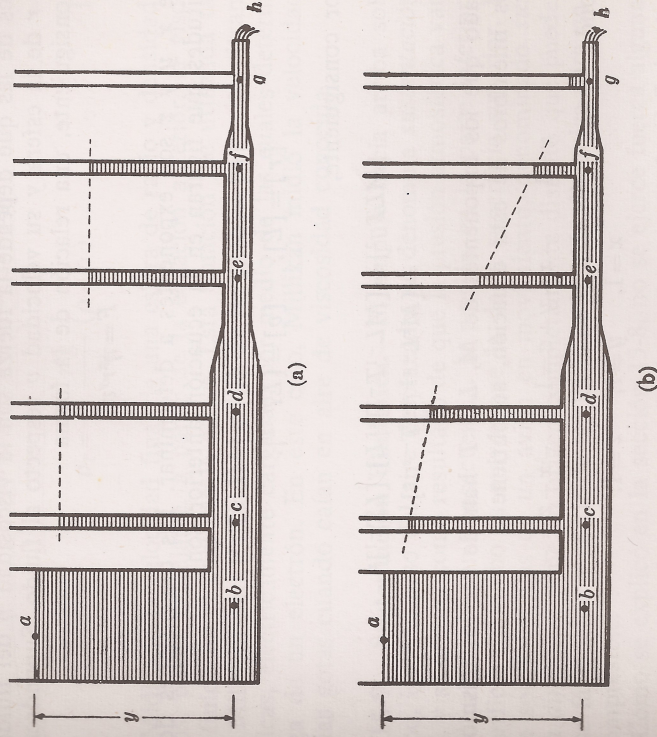


Fig. 15-15.—Presiones a lo largo de un tubo horizontal en el cual está circulando: (a) un líquido ideal, (b) un líquido viscoso.

e y f es mayor que entre c y d a causa de que el radio es menor. Finalmente, la presión en g es algo superior a la atmosférica, ya que existe un gradiente de presión entre este punto y el extremo del tubo.

15-8. Ley de Stokes.—Cuando un fluido ideal de viscosidad nula circula alrededor de una esfera, o cuando una esfera se mueve a través de un fluido en reposo, las líneas de corriente forman alrededor de la esfera una figura perfectamente simétrica, como muestra la figura 15-2 (a). La presión en cualquier punto de la superficie semiesférica que se enfrenta a la corriente es exactamente la misma que en el punto correspondiente de la cara posterior, y la fuerza resultante sobre la esfera es nula. Sin embargo, si el fluido es viscoso, habrá un rozamiento debido a la viscosidad sobre la esfera. (Este rozamiento existirá, naturalmente, sobre cualquier cuerpo independientemente de su forma, pero solo para una esfera resulta fácilmente calculable.)

No intentaremos deducir directamente la expresión de la fuerza debida a la viscosidad a partir de las leyes del flujo de un líquido viscoso. Sin embargo, puede deducirse fácilmente la *forma* de dicha expresión utilizando los métodos del análisis dimensional. Las únicas magnitudes de las que depende la fuerza son la viscosidad η del fluido, el radio r de la esfera y su velocidad v respecto al fluido. Supondremos, por consiguiente, una relación de la forma

$$F = \eta^x r^y v^z,$$

donde x , y y z son exponentes a determinar. Las dimensiones de las magnitudes que figuran en la ecuación anterior son

$$[F] = [MLT^{-2}], \quad [\eta] = [ML^{-1}T^{-1}], \\ [r] = [L], \quad [v] = [LT^{-1}].$$

Por consiguiente,

$$[MLT^{-2}] = [ML^{-1}T^{-1}]^x [L]^y [LT^{-1}]^z \\ = [M^x L^{-x+y+z} T^{-x-z}].$$

Dado que los exponentes de M , L y T han de ser los mismos en ambos miembros de esta ecuación, se obtiene

$$x = 1, \quad -x + y + z = 1, \quad -x - z = -2,$$

de donde

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1.$$

Esto es, la expresión de la fuerza F tiene la forma

$$F = \eta r v.$$

Un estudio completo demuestra que esto es correcto, salvo que el segundo miembro ha de multiplicarse por el factor 6π . (Los coeficientes numéricos de este tipo no pueden obtenerse nunca por los métodos del análisis dimensional.) Por tanto,

$$F = 6\pi\eta r v. \quad [15-20]$$

Esta ecuación se denomina *ley de Stokes* por haber sido deducida por vez primera en 1845 por Sir George Stokes. La hemos utilizado ya en la sección 5-9 al estudiar el movimiento de una esfera que cae en un fluido viscoso, aunque entonces solo era necesario conocer que la fuerza debida a la viscosidad, sobre una esfera dada en un fluido determinado, es proporcional a la velocidad relativa.

Se recordará que una esfera que cae en un fluido viscoso alcanza una *velocidad final* v_T para la cual la fuerza retardadora más el empuje es

igual al peso de la esfera. Sea ρ la densidad de la esfera y ρ' la densidad del fluido. El peso de la esfera es entonces $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$, el empuje es $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$, y cuando se alcanza la velocidad final

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta r v_T = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g,$$

o sea

$$v_T = \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} (\rho - \rho') \quad [15-21]$$

Midiendo la velocidad final de una esfera de radio y densidad conocidos, puede calcularse, a partir de la ecuación anterior, la viscosidad del fluido en el cual cae la esfera. Esta ecuación fue utilizada también por Millikan para calcular el radio de las gotitas de aceite ultramicroscópicas, eléctricamente cargadas, por medio de las cuales determinó la carga de un electrón. En este caso, Millikan midió la velocidad final de las gotas cuando caían en aire de viscosidad conocida.

15-9. Sustentación dinámica.—El empuje hacia arriba sobre un globo, igual al peso del aire desplazado, se denomina *sustentación estática*, y se origina como resultado de que la presión atmosférica varía con la altura y que, en consecuencia, la presión en la parte inferior de la superficie del globo es mayor que la de la superficie superior. El empuje sobre las alas de un avión en movimiento, denominado *sustentación dinámica*, tiene un origen completamente distinto que puede explicarse fácilmente a partir de las leyes de la hidrodinámica para un fluido incompresible.

Como se explicó en la sección 15-8, no se ejerce fuerza alguna sobre un cuerpo móvil dentro de un fluido perfecto, cuando el flujo alrededor del cuerpo es simétrico. Sin embargo, si el flujo se altera de tal modo que aumenta la velocidad por encima del cuerpo y disminuye por debajo de él, entonces, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, la presión estática en la superficie superior disminuye y en la inferior aumenta. Sobre el cuerpo actúa entonces una fuerza resultante hacia arriba, y esta fuerza se denomina sustentación dinámica.

Se originará un flujo asimétrico alrededor del cuerpo si se superpone al flujo simétrico inicial un *flujo de circulación*. Un flujo de circulación es aquel que rodea al cuerpo y cuyas líneas de corriente son curvas cerradas. Está caracterizado por una magnitud Γ denominada *circulación*. Sea ds (Fig. 15-16) un elemento infinitesimal de longitud de una curva cerrada arbitraria en un fluido móvil, y v_s la componente de la velocidad del fluido en la dirección de ds . Se define la circulación como la integral curvilínea del producto $v_s ds$ alrededor de la curva cerrada. Puede expresarse también como la integral curvilínea del producto escalar de los vectores $\mathbf{v}$ y $d\mathbf{s}$:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}. \quad [15-22]$$