

ja rayada es

$$dF = P dA = \rho g(H - y) \times L dy.$$

Y la fuerza total,

$$F = \int dF = \int_0^H \rho g L(H - y) dy = \frac{1}{2} \rho g L H^2.$$

El momento de la fuerza dF respecto a un eje que pasa por O vale

$$dM = y dF = \rho g L y(H - y) dy.$$

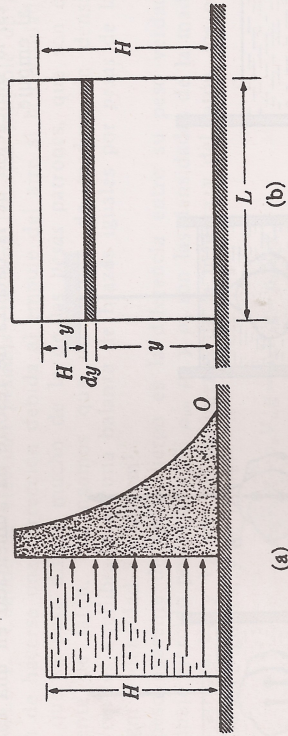


FIG. 14-10.—Fuerzas sobre un dique.

El momento total respecto a O será:

$$M = \int dM = \int_0^H \rho g L y(H - y) dy = \frac{1}{6} \rho g L H^3.$$

Si $\bar{H}$ es la altura por encima de O , a la cual la fuerza total F hubiera tenido que actuar para producir el mismo momento, se tiene:

$$F\bar{H} = \frac{1}{2} \rho g L H^2 \times \bar{H} = \frac{1}{6} \rho g L H^3, \quad \bar{H} = \frac{1}{3} H.$$

Por consiguiente, la línea de acción de la resultante se encuentra a $\frac{1}{3}$ de la altura por encima de O , o sea, a $\frac{2}{3}$ de profundidad por debajo de la superficie.

14-7. Tensión superficial.—Un líquido que fluye lentamente por el extremo de un cuentagotas medicinal no sale en forma de chorro continuo, sino como una sucesión de gotas. Una aguja de coser, colocada cuidadosamente sobre la superficie del agua, forma en ella una pequeña depresión y permanece en reposo sin hundirse, aunque su densidad puede llegar a ser hasta diez veces mayor que la del agua. Cuando un tubo limpio de vidrio, de pequeño calibre, se sumerge dentro del agua, esta se eleva en su interior; pero si se sumerge en mercurio, el mercurio desciende. Estas experiencias, y otras muchas de naturaleza

análoga, están relacionadas con la existencia de una *superficie límite* entre un líquido y otra sustancia.

Todos los fenómenos citados indican que la superficie de un líquido puede suponerse en un estado de tensión tal que, si se considera cualquier línea situada sobre ella o limitándola, la sustancia que se encuentra a un lado de dicha línea ejerce una tracción sobre la situada al otro lado. Esta tracción actúa en el plano de la superficie y es perpendicular a la línea. Dicho efecto puede demostrarse con el sencillo aparato representado en la figura 14-11. Un anillo de alambre de algunos centímetros de diámetro tiene sujeto a él un bucle de hilo, según se indica. Cuando el anillo y el hilo se introducen en una disolución de jabón se

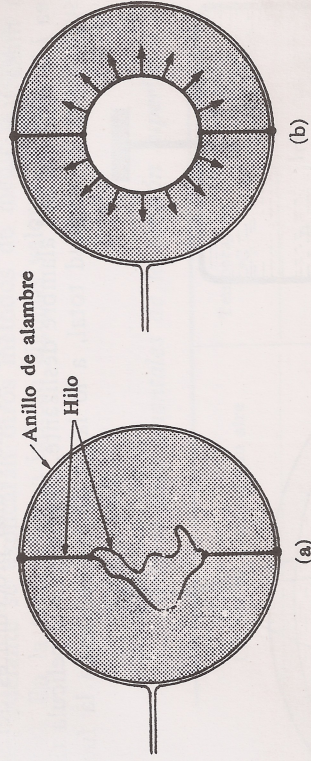


FIG. 14-11.—Anillo de alambre con un bucle flexible de hilo, introducido en una disolución de jabón: (a) antes y (b) después de perforar la película superficial del interior del bucle.

forma, al sacarlos de ella, una delgada película de líquido en la cual flota libremente el hilo, como se indica en (a). Si se pincha el interior del bucle de hilo, este toma una forma circular, según puede verse en (b), como si las superficies del líquido tirasen radialmente hacia afuera, en el sentido de las flechas. Hemos de admitir que antes de pinchar la lámina actuaban las mismas fuerzas; pero como entonces había lámina líquida a *ambos* lados del hilo, la fuerza neta ejercida por la lámina sobre cualquier porción del hilo era nula.

Otro sencillo aparato para demostrar los efectos de superficie está representado en la figura 14-12. Un trozo de alambre se ha doblado en forma de U, utilizando como deslizador un segundo trozo de alambre. Cuando este dispositivo se introduce en una disolución de jabón y se saca de ella, el deslizador (siempre que su peso w_1 no sea demasiado grande) es rápidamente desplazado hacia la parte superior de la U (invertida), y para mantenerlo en equilibrio es necesario añadir un segundo peso w_2 . Aunque parezca extraño, la misma fuerza total $F = w_1 + w_2$ mantendrá el alambre en reposo, independientemente del área de la lámina líquida, siempre que esta lámina permanezca a temperatura

constante. Este comportamiento difiere mucho del de una lámina de goma, para la cual la fuerza se haría mayor al estirar la lámina.

Aunque una película de jabón como la de la figura 14-12 es muy delgada, su espesor es enorme comparado con el tamaño de una molécula. Por consiguiente, puede considerarse formada fundamentalmente por un volumen líquido, limitado por dos capas superficiales cuyo espesor es de algunas moléculas. Cuando se tira hacia abajo de la varilla transversal de la figura 14-12 y se aumenta el área de la lámina, hay moléculas, situadas inicialmente en el interior de la masa líquida, que se desplazan hacia las capas superficiales. Esto es, estas capas no están tensadas como lo estaría una lámina de goma, sino que su área ha aumentado por este desplazamiento de moléculas procedentes del seno de la masa líquida.

Sea l la longitud del alambre deslizante. Puesto que la película tiene dos superficies, la longitud total, a lo largo de la cual actúa la fuerza

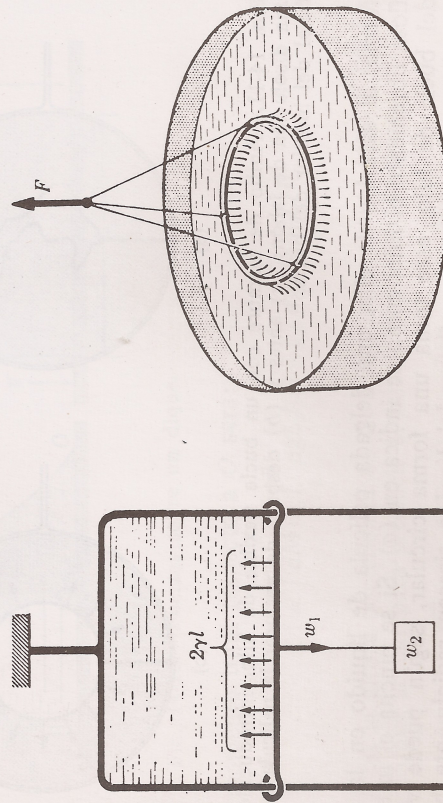


FIG. 14-12.—El alambre deslizante horizontal está en equilibrio bajo la acción de la fuerza superficial $2\gamma l$ dirigida hacia arriba y de la tracción hacia abajo, $w_1 + w_2$.

FIG. 14-13.—La extracción de un anillo de longitud l fuera de un líquido requiere una fuerza adicional F para equilibrar las fuerzas de superficie $2\gamma l$. Este método se utiliza corrientemente para medir la tensión superficial.

superficial, es $2l$. Se define la *tensión superficial*, γ , en la película, como la razón de la fuerza superficial a la longitud (perpendicular a la fuerza) a lo largo de la cual actúa. Por tanto, en este caso:

$$\gamma = \frac{F}{2l} \quad [14-5]$$

La unidad de tensión superficial, en el sistema cgs, es 1 dina/cm.

Otro modo, menos espectacular, de demostrar la existencia de una fuerza de superficie utiliza un aparato real, cuyo principio indica la figura 14-13, y que se emplea a menudo para medir la tensión superficial. Un alambre circular de longitud l es extraído de una masa líquida. La fuerza adicional F necesaria para equilibrar las fuerzas de superficie $2\gamma l$ debidas a las dos láminas superficiales, una a cada lado, se mide por la tensión de un delicado resorte, o por la torsión de un hilo. La tensión superficial está dada por

$$\gamma = \frac{F}{2l}$$

Más adelante se explicarán otros métodos de medir la tensión superficial. En la tabla 14-1 se indican algunos valores típicos.

TABLA 14-1

Valores experimentales de la tensión superficial

Líquido en contacto con aire	Temperatura °C	Tensión superficial en dinas/cm
Agua	0	75,6
Agua	20	72,8
Agua	60	66,2
Agua	100	58,9
Aceite de oliva	20	32,0
Alcohol etílico	20	22,3
Benceno	20	28,9
Disolución de jabón	20	25,0
Glicerina	20	63,1
Mercurio	20	465
Tetracloruro de carbono	20	26,8
Helio	-269	0,12
Neón	-247	5,15
Oxígeno	-193	15,7

La tensión superficial de un líquido en contacto con su propio vapor o con el aire, solo depende de la naturaleza del líquido y de la temperatura. Los valores para el agua que figuran en la tabla 14-1 confirman una ley general: la tensión superficial disminuye al aumentar la temperatura. Las medidas de la tensión superficial de una capa de aceite extremadamente delgada extendida sobre la superficie del agua indican que, en este caso, la tensión superficial depende a la vez del área de la película de aceite y de la temperatura.

14-8. Tensión superficial y energía de superficie.—Otro punto de vista útil en relación con los efectos de superficie es el siguiente: suponemos que el alambre horizontal de la figura 14-12 se desplaza hacia abajo una distancia y mediante una fuerza $F = w_1 + w_2$, asimismo dirigida hacia abajo. La fuerza F permanecerá constante siempre que la temperatura de la superficie de la lámina se mantenga fija durante el movimiento. El trabajo realizado es Fy , y el área total de la superficie ha aumentado en $2ly$. Por tanto, el trabajo realizado por unidad de área, al aumentar esta, es

$$\frac{\text{Trabajo}}{\text{Incremento de área}} = \frac{Fy}{2ly} = \frac{F}{2l} \quad [14-6]$$

Pero, en virtud de la Ec. [14-5], esta es la expresión de la tensión superficial γ , y, por consiguiente, γ puede considerarse o como *fuerza por unidad de longitud* perpendicular a la fuerza, o como *trabajo realizado por unidad de área* al aumentar la superficie. Utilizando la segunda definición, la unidad cgs de γ sería 1 erg/cm², que es equivalente a 1 dina/cm, dado que 1 erg = 1 dina · cm.

Sin embargo, el trabajo realizado cuando se aumenta el área de una lámina superficial a temperatura constante no es igual al incremento de energía de la lámina, porque para mantener la temperatura constante es necesario suministrar algo de calor a la lámina. (Si no se la suministra calor, la temperatura de la lámina descende. El fenómeno es análogo al descenso de temperatura cuando se evapora un líquido.)

El aumento de energía superficial de la lámina es igual a la suma del trabajo realizado y del calor suministrado. Consulte para más detalles una obra de Termodinámica.

Si representamos por U la energía de una lámina superficial de área A , su energía superficial por unidad de área, U/A , está relacionada con su tensión superficial por la ecuación

$$\frac{U}{A} = \gamma - T \frac{d\gamma}{dT},$$

siendo T la temperatura absoluta.

Dado que la tensión superficial disminuye siempre al elevar la temperatura,

$d\gamma/dT$ es negativa y la energía superficial por unidad de área es mayor que la tensión superficial. La figura 14-14 representa gráficas de la energía superficial por unidad de área y de la tensión superficial, en función de la temperatura, para el

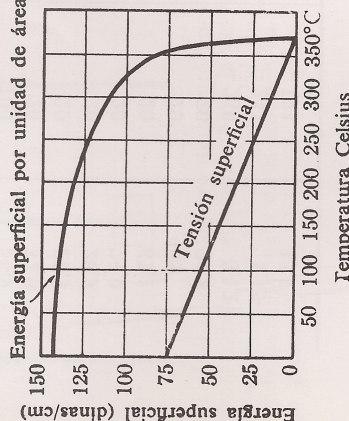


FIG. 14-14.—Energía superficial y tensión superficial del agua en función de la temperatura.

minuye siempre al elevar la temperatura, $d\gamma/dT$ es negativa y la energía superficial por unidad de área es mayor que la tensión superficial. La figura 14-14 representa gráficas de la energía superficial por unidad de área y de la tensión superficial, en función de la temperatura, para el

caso del agua. La temperatura de 374° C en que ambas se anulan, es la *temperatura crítica* (véase Sec. 21-4).

14-9. Diferencia de presión entre ambas caras de una lámina líquida.—Una burbuja de jabón está formada por dos láminas superficiales esféricas muy juntas y un líquido entre ellas. Si aislamos la mitad de la burbuja y aplicamos los principios de la estática al equilibrio de esta mitad, obtenemos una relación sencilla entre la tensión superficial y la diferencia de presiones del aire en el interior y en el exterior de la burbuja. Consideremos en primer lugar el pequeño elemento de superficie dA representado en la figura 14-15. Supongamos que la presión a la izquierda de este elemento es P y a la derecha P_a . La fuerza normal al elemento es, por tanto, $(P - P_a) dA$. La componente de esta fuerza en la dirección x será:

$$(P - P_a) dA \cos \theta.$$

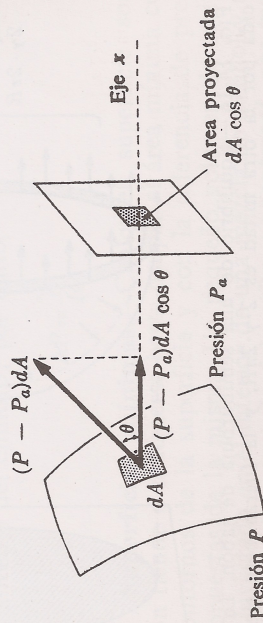


FIG. 14-15.—La fuerza en la dirección x es igual a la diferencia de presión multiplicada por la *proyección* del área sobre un plano perpendicular a la dirección x .

Pero $dA \cos \theta$ es la proyección del área sobre un plano perpendicular al eje x . La fuerza en la dirección x es, por consiguiente, la diferencia de presiones multiplicada por la proyección del área sobre un plano perpendicular a la dirección x .

Consideremos ahora la semiburbuja que está representada en la figura 14-16. La otra mitad ejerce una fuerza hacia la izquierda igual a dos veces la tensión superficial por el perímetro; o sea,

$$F \text{ (hacia la izquierda)} = 2\gamma \times 2\pi R.$$

La fuerza hacia la derecha es igual a la diferencia de presión, $P - P_a$, multiplicada por el área obtenida al proyectar la semiburbuja sobre un plano perpendicular a la dirección en cuestión. Puesto que esta proyección es πR^2 :

$$F \text{ (hacia la derecha)} = (P - P_a) \pi R^2.$$

Dado que la semiburbuja está en equilibrio:

$$(P - P_a) \pi R^2 = 4\pi R \gamma;$$

o sea,

$$P - P_a = \frac{4\gamma}{R} \quad (\text{Burbuja de jabón}). \quad [14-7]$$

Se deduce de este resultado que si la tensión superficial permanece constante (ello significa temperatura constante), la diferencia de presiones es tanto mayor cuanto menor es el valor de R . Por consiguiente,

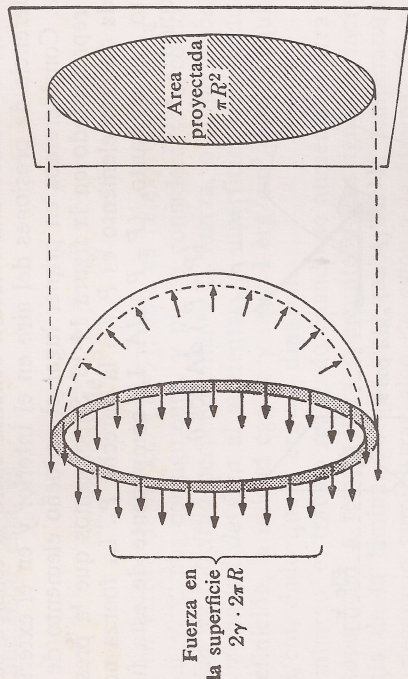


Fig. 14-16.—Equilibrio de una semiburbuja de jabón. La fuerza ejercida por la otra mitad es $2\gamma \cdot 2\pi R$, y la fuerza neta ejercida por el aire interior y exterior a la burbuja es la diferencia de presiones multiplicada por la proyección del área, o sea $(P - P_a)\pi R^2$.

si se soplan dos burbujas en los extremos opuestos de un tubo, la más pequeña de las dos obligará al aire a entrar en la grande. En otras palabras, la pequeña se hará aún menor y la grande aumentará.

Puede comprobarse fácilmente que en el caso de una gota líquida que solo tiene una superficie, la diferencia de presiones del líquido y del aire exterior está dada por

$$P - P_a = \frac{2\gamma}{R} \quad (\text{Gota líquida}). \quad [14-8]$$

EJEMPLO. Calcúlese el exceso de presión en el interior de una gota de mercurio cuya temperatura es 20°C , y su diámetro, 4 mm.

$$P - P_a = \frac{2\gamma}{R} \\ = \frac{2 \times 465 \text{ dinas/cm}}{0,4 \text{ cm}} = 2325 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$$

Toda pequeña porción de una superficie curva cualquiera puede

compararse a una burbuja que tiene dos radios de curvatura distintos en direcciones perpendiculares entre sí. Si estos radios, llamados *radios principales de curvatura*, se designan por R_1 y R_2 , la expresión general de la diferencia de presión es

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad [14-9]$$

Los radios de curvatura de una esfera en dos direcciones cualesquiera perpendiculares entre sí son iguales al radio R de la esfera. Si $R_1 = R_2 = R$, se deduce de la Ec. [14-9] que

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R}$$

Para un cilindro, uno de los radios de curvatura es infinito, y el otro, igual al radio del cilindro; por tanto,

$$\Delta P = \frac{\gamma}{R}$$

14-10. Superficies mínimas.—Cualquier superficie sometida a una tensión tiende a contraerse hasta ocupar el área mínima compatible con los contornos de la superficie y con la diferencia de presiones en las caras opuestas de la misma. Un pequeño volumen de aceite pesado de motor, inyectado en el interior de una mezcla de alcohol y agua cuya densidad sea la misma que la del aceite, se contraerá, por tanto, hasta que tenga la superficie mínima compatible con su volumen. La forma de tal superficie es la esférica.

Un caso más interesante se describe en la figura 14-17, que representa una serie de fotografías, obtenidas a gran velocidad, de las sucesivas etapas de formación de una gota de leche en el extremo de un tubo vertical. Las fotografías fueron tomadas por el doctor Edgerton, del M. I. T. En realidad, el proceso, si se examina con detalle, es extremadamente complejo. Una característica interesante es la pequeña gota que sigue a la grande. Ambas gotas efectúan después de su formación (4, 5 y 6) una serie de oscilaciones, y finalmente toman forma esférica (7), que se conservaría si no fuera por los efectos debidos a la resistencia del aire, según se indica en (8) y (9). La gota representada en (9) ha caído desde una altura de 14 pies.

Puede deducirse una relación aproximada entre el peso, w , de la gota y el radio del tubo del cual cae, suponiendo que se alcanza el tamaño mínimo de la gota capaz de ser sostenida por el tubo cuando el peso de aquella es igual a la fuerza de tensión superficial alrededor de una circunferencia cuyo diámetro es igual al del tubo. Esto conduce a la ecuación

$$w = 2\pi r \gamma.$$