CARACTERIZACION DE UN SISTEMA FISICO

1. Obtención de la relación funcional entre dos variables

Para poder entender los fenómeno o procesos que tienen lugar en un dado sistema necesitamos encontrar las variables que le producen modificaciones (entradas, e) e identificar cómo responde dicho sistema (salidas, s) frente a cambios de las variables. Esto significa encontrar la función matemática que relaciona las entradas y con la salida, es decir encontrar la relación funcional: $s = f(e)$. A tal fin deberemos analizar el sistema y ensayar su comportamiento, discutir y acordar en el grupo de trabajo qué magnitudes se pretende medir, para luego proceder a la medición.

El proceso de medición supone:[1]

a) Un sistema objeto de la medida

b) Un instrumento de medida

c) Un sistema de comparación con la unidad o patrón, que tiene su espacio de estados propio.

Para definir el proceso es necesario especificar cómo debe realizarse la interacción entre a, b y c. Esto implica en primer lugar la selección del instrumento más adecuado, luego el entender cómo debe emplearse y sus limitaciones. Parte del proceso implica revisar si el instrumento reproduce el valor esperado del patrón1[2] de la magnitud a medir, este último proceso que corresponde a la interacción entre b y c se denomina calibración. El proceso define una **magnitud física** y da como resultado un **valor**, el valor obtenido es el número de veces que la unidad o patrón está contenida en el sistema objeto de medida. El resultado será un número (en realidad es un intervalo[3]) con unidades.

Supongamos ahora que estamos estudiando un sistema particular para el cuál la magnitud m_1 constituye la variable de entrada, e, y la m_2 la respuesta del sistema, s. Una vez identificado el sistema a estudiar y cuáles son las magnitudes que se desea medir deberemos los instrumentos más adecuados para determinar los valores de m_1 y m_2 y realizamos las medidas.

Acá surge una duda ¿cuántos valores de cada variable debemos medir? La respuesta no es obvia. Supongamos que decidimos tomar 3 medidas

En la primera instancia registramos los datos en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1. Valores obtenidos de las magnitudes m_1 y m_2.

	Entrada	**Salida**
número de medida	m_1 (unidades)	m_2 (unidades)
1	0	0
2	50	50
3	100	100

[1] Roederer, Juan G. (1986). *Mecánica Elemental*. 8a. edición. EUDEBA. Buenos Aires.

[2] Por patrón entendemos una unidad de medida que por convención de acepta como referencia.

[3] Ver apuntes de la cátedra de Física I. G. Punte. *Mediciones: su interpretación y presentación.* Fotocopia en el CEILP o archivo en la página de la cátedra *Medición_06.doc.*

Recordemos que nuestro objetivo es encontrar la función que relaciona m_1 con m_2, a tal fin parece más conveniente realizar una representación gráfica en la que m_1 esté en abscisas y m_2 en ordenadas como se muestra en la Figura 1.1.

La Figura 1.1 parecería mostrar que los datos están sobre una línea recta. Podemos preguntarnos: si uniéramos los puntos con una recta y realizáramos nuevas medidas de m_1, digamos con $0 < m_1 < 50$ ¿Los valores que se obtengan de m_2 serán tales que caigan sobre dicha recta?.

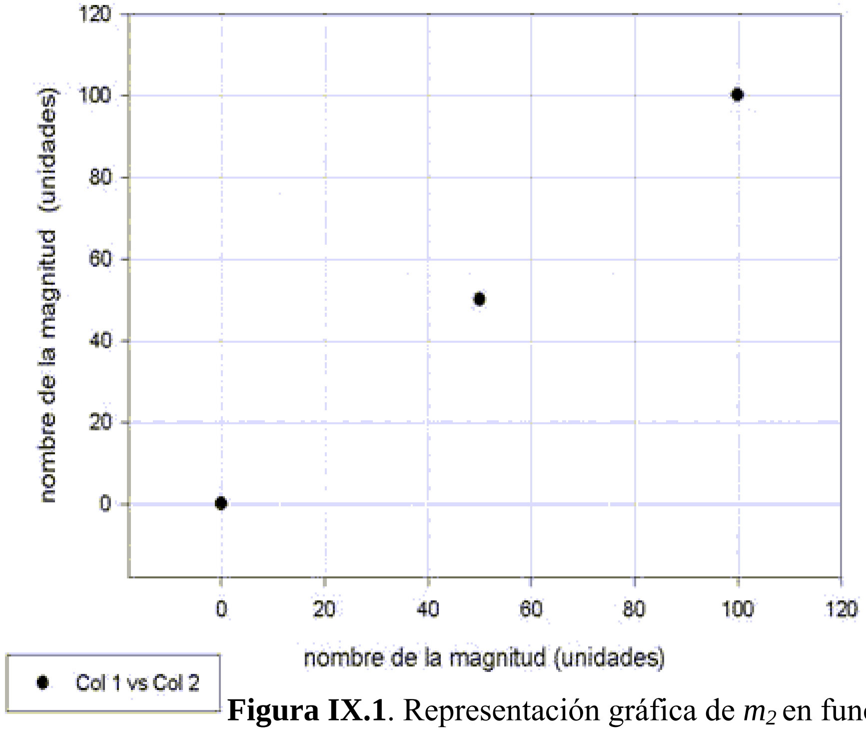

Figura IX.1. Representación gráfica de m_2 en función de m_1

Esta pregunta equivaldría a preguntarnos: ¿Son los tres datos obtenidos suficientes para obtener una función $m_2 = f(m_1)$ confiable en el intervalo [0,100]?. Es decir que prediga adecuadamente para el rango de valores de m_1 comprendido entre los valores extremos medidos ($0 < m_1 < 100$) el valor esperable de m_2.

Veamos qué obtenemos al realizar las medidas intermedias que se muestran en la Tabla 1.2:

Tabla 1.2. Valores intermedios obtenidos para las magnitudes m_1 y m_2.

	Entrada	**Salida**
número de medida	m_1 (unidades)	M_2 (unidades)
1	0	0
2	10	9.7
3	20	20.5
4	30	29.7
5	40	40
6	50	49
7	60	61.5
8	70	74
9	80	80
10	90	88
11	100	100

Si graficamos los datos de la tabla precedente obtenemos la Figura 1.2. Si unimos los puntos de la Figura 1.2 con segmentos obtendremos la Figura 1.3.

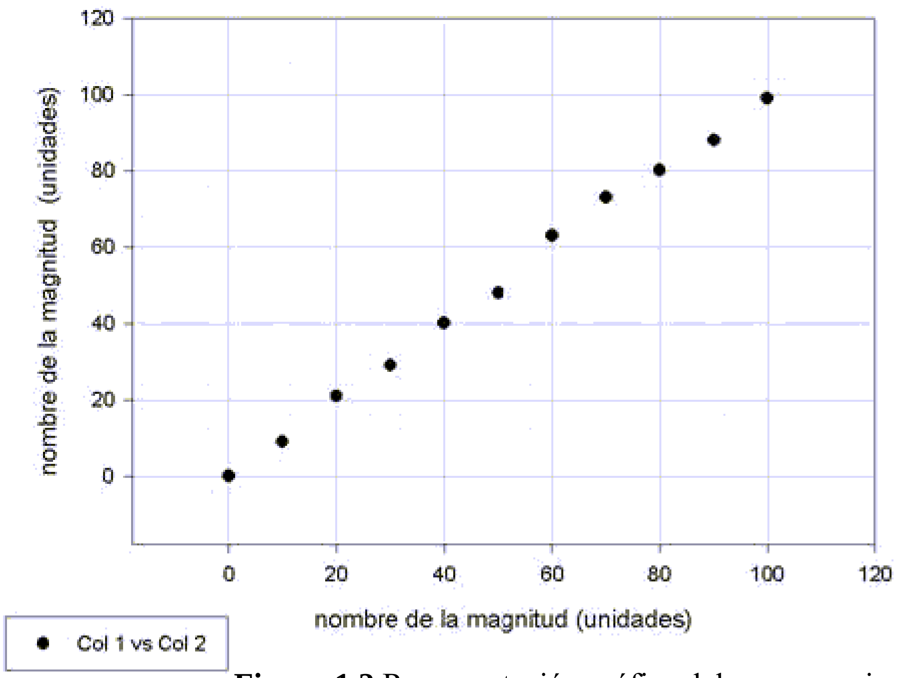

Figura 1.2 Representación gráfica del nuevo conjunto m_2 en función de m_1

Una mirada a esta última figura nos muestra que si bien las magnitudes m_1 y m_2 parecerían guardar una relación lineal, no parece tan claro a partir de la figura cuál es la recta que representa mejor dicha relación

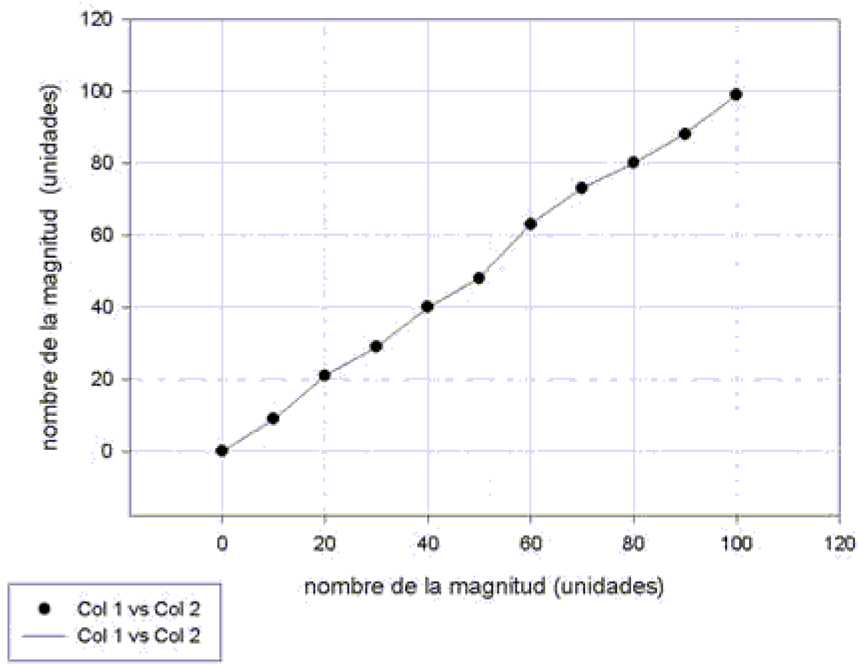

Figura 1.3. Representación gráfica de los datos contenidos en la Tabla 1.2. Se supone una relación lineal entre puntos sucesivos

Podemos preguntarnos entonces:
a)¿Cuál es la función que mejor representa la relación entre ambas magnitudes?
b)¿Cómo la obtenemos?
c)¿Cómo la informamos?

2. OBTENCIÓN DE LA MEJOR RELACION LINEAL ENTRE DOS MAGNITUDES

2.1. Aproximación gráfica.

Como primer paso en esta dirección podríamos trazar una recta que interpole nuestros puntos experimentales, interpolar quiere decir que pase por el mayor número de puntos posibles y deje la misma cantidad de puntos por encima y por debajo como se muestra en la Figura 2.1.1. La recta podremos expresarla como:

$m_2 = A\, m_1 + B$ (2.1)

donde A es la pendiente
y B la ordenada al origen

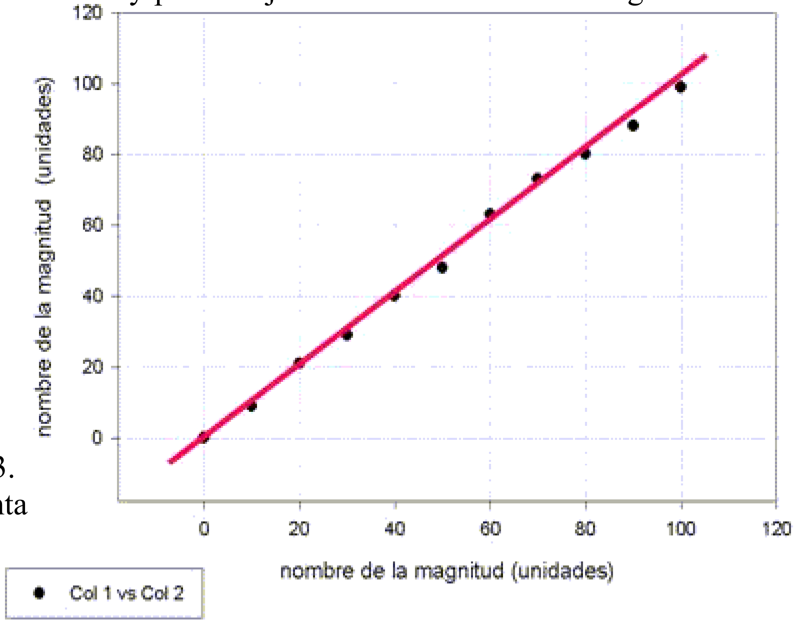

Figura 2.1.1. Representación gráfica de los datos de la Tabla 1.3. En rojo: recta que representa la relación funcional.

Algún alumno atento ya se habrá preguntado: ¿dónde tuvimos en cuenta las incertidumbres[4] en las medidas de m_1 y m_2?...y tendría razón en hacer la pregunta, pues: no las tuvimos en cuenta. Las tablas presentadas anteriormente no están completas, falta agregarle a cada medida cuál es la incertidumbre correspondiente. Por lo tanto la presentación anterior de los datos, tanto en forma de tabla como gráfica es incompleta o mejor aún incorrecta.

Construyamos, entonces, ahora adecuadamente, la Tabla 1.2 y la Figura 1.4.

Tabla 2.1.1. Valores obtenidos de las magnitudes m_1 y m_2,. incertidumbre en paréntesis

	Entrada	**salida**
Número de medida	**m_1 (unidades)**	**m_2 (unidades)**
1	0(0.2)	0(0.1)
2	10(0.2)	9.7(0.1)
3	20(0.2)	20.5(0.1)
4	30(0.2)	29.7(0.1)
5	40(0.2)	40(0.1)
6	50(0.2)	49(0.1)
7	60(0.2)	61.5(0.1)
8	70(0.2)	74(0.1)
9	80(0.2)	80(0.1)
10	90(0.2)	88(0.1)
11	100(0.2)	100(0.1)

[4] Incertidumbre de una medida es el intervalo en el que tenemos confianza de obtener el valor de una nueva medida de la misma magnitud si la medición se realiza en las mismas condiciones.

En la Figura 1.5 a la representación de cada valor medido le corresponderá entonces un rectángulo que indica la incertidumbre de la medida de cada una de las variables representadas

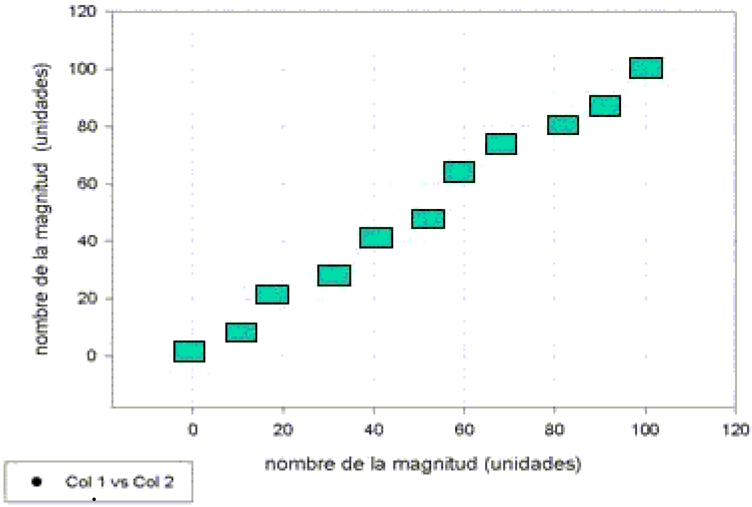

Figura 2.1.2. Representación gráfica de los datos de la Tabla 2.1.1.

¿Cómo construimos a la recta que pueda representar a la relación funcional entre la entrada, m_1, y la salida, m_2? Debería ser una recta que pase por todos los rectángulos. La relación funcional estaría dada por:

$$m_2 = A\, m_1 + B \qquad (2.2)$$

donde A y B no pueden ser números exactos sino intervalos de la forma A± ΔA, B± ΔB, dado que la recta debe construirse a partir de datos experimentales que están afectados de incertidumbre. Los coeficientes de la recta expresada en la ecuación 1.2 no serán por lo tanto números sino intervalos ¿cómo los obtenemos? ¿Cómo expresaremos a la mejor función que represente al conjunto de datos presentado en la Tabla 2.1.1?

Podríamos hacer nuevamente una interpolación o podemos hacer una **Aproximación gráfica más elaborada.** Podemos buscar las rectas de mayor y menor pendiente que pasen por el mayor número posible de rectángulos. A partir de éstas podremos obtener la recta promedio, como semisuma de las otros dos. Al intervalo en el que estarán comprendidas la pendiente y la ordenada al origen de dicha recta promedio lo obtendremos a partir de la semidiferencia de las rectas de máxima y mínima pendiente, como se muestra a continuación.

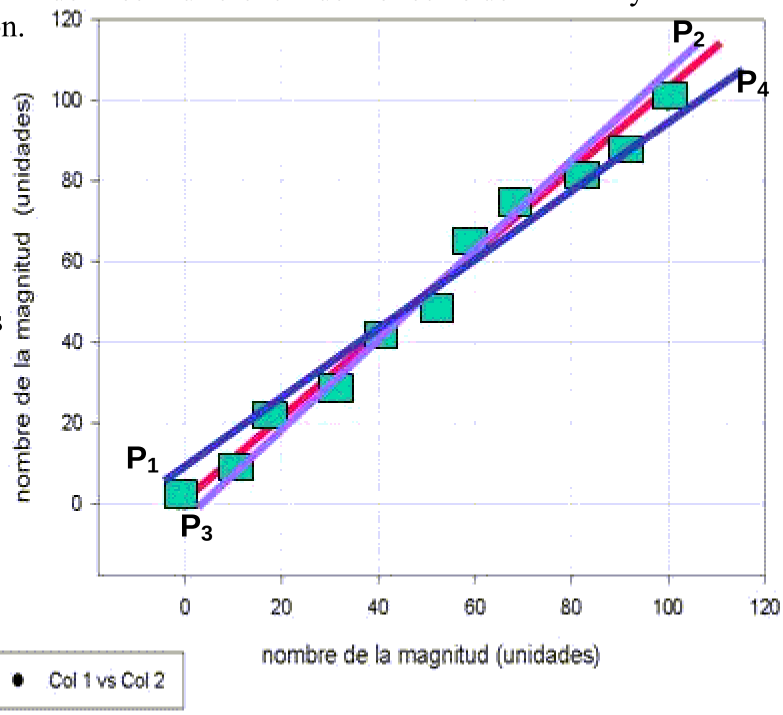

Figura 2.1.3. Representación de los datos de la Tabla 2.1.1. Se muestran las rectas de máxima pendiente ( ), de mínima pendiente ( ) y la promedio ( ).

A la línea recta de máxima pendiente de la Figura 2.1.3 podemos representarla por la función:

$$m_2 = A_1\, m_1 + B_1 \qquad (2.3)$$

y a la de mínima pendiente por la función:

$$m_2 = A_2\, m_1 + B_2 \qquad (2.4)$$

Si hacemos la semisuma de las expresiones (2.3) y (2.4) obtendremos los coeficientes, A y B, de la recta promedio. Mientras que la semidiferencia de (2.3) y (2.4) nos dará el intervalo de incertidumbre, ΔA y ΔB.

Por lo tanto el mejor conjunto de rectas que nos informan el intervalo en el que podremos esperar que caiga una nueva medida, estará dado por la expresión:

$$m_2 = (A \pm \Delta A)\, m_1 + (B \pm \Delta B) \qquad (2.5)$$

En la que

$$A = (A_1 + A_2) / 2 \qquad B = (B_1 + B_2) / 2 \qquad (2.6)$$

$$\Delta A = (A_1 - A_2) / 2 \qquad \Delta B = (B_1 - B_2) / 2 \qquad (2.7)$$

Ejercicio: Grafique las cuatro rectas que surgen de tomar todas las combinaciones posibles de signos en la expresión 2.5 y analice la franja de valores posibles para la relación entre m_1 y m_2.

Revisemos los resultados, si pensáramos que las rectas de máxima y mínima pendiente delimitan la franja de valores posibles para pendientes y ordenadas al origen, eso implicaría que al punto en el que se produce la intersección de las rectas de máxima y mínima pendiente le correspondería una incertidumbre 0, hecho incompatible con la teoría de la medida. Volviendo a la figura 1.6, podemos apreciar que la franja más adecuada para representar la relación funcional con su incertidumbre corresponde a todas las rectas comprendidas entre la recta definida por los puntos P_1 y P_2 y la recta definida por los puntos P_3 y P_4. Puntos que son fácilmente obtenibles. Por ej. el punto P_1 se obtiene reemplazando en la recta de mínima pendiente el valor de m_1 por el mínimo valor de m_1, de esta manera obtendremos el máximo valor de la variable m_2 correspondiente al mínimo valor de m_1. Siguiendo el mismo razonamiento podemos obtener el punto P_2 reemplazando en la recta de máxima pendiente el valor de m_1 por el máximo valor de m_1 de esta manera obtendremos el máximo valor de la variable m_2 correspondiente al máximo valor de m_1. Los puntos P3 y P4 se obtienen de manera similar para obtener los valores máximo y mínimo de m_2 correspondientes al valor mínimo y máximo de m_1. Se obtienen así la coordenadas de los puntos P_1 y P_2, $[m_{1\text{mín}}, m_{2\text{máx}}(m_{1\text{mín}})]$ y $[m_{1\text{máx}}, m_{2\text{máx}}(m_{1\text{máx}})]$ que permiten determinar la recta que define el límite superior de la franja y las coordenadas de los puntos P_3 y P_4, $[m_{1\text{mín}}, m_{2\text{mín}}(m_{1\text{mín}})]$ y $[m_{1\text{máx}}, m_{2\text{mín}}(m_{1\text{máx}})]$ que permiten determinar la recta que define el límite inferior de la franja. Todas las rectas correspondientes a la franja constituyen una buena representación de la medida.

2.2 Obtención analítica de la mejor recta. EL Método de mínimos cuadrados.

Al construir un modelo para un fenómeno concreto, deben tenerse en cuenta dos objetivos importantes: la simplicidad y la precisión. A veces, estos dos objetivos entran en conflicto. Asi, por ejemplo, un modelo lineal simple y = a + b x, para ajustar puntos en un caso puede resultar satisfactorio, mientras que en otros casos, con un modelo cuadrático $y = a + b\,x + c\,x^2$, se consigue una precisión mucho mayor.

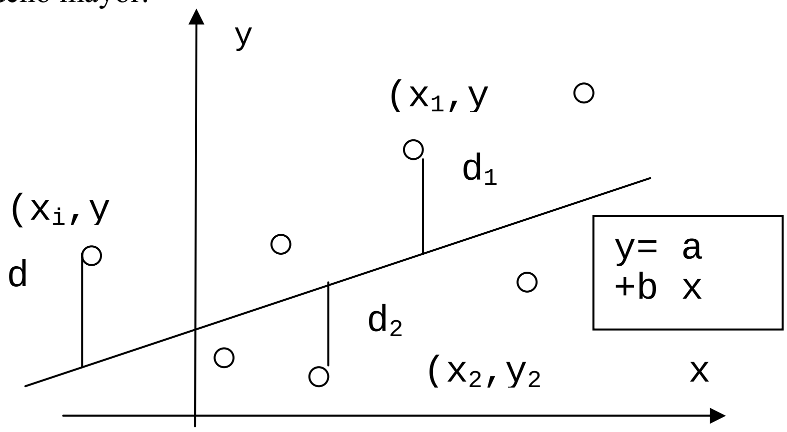

Figura 2.2.1: Ejemplo del caso lineal f(x) = a + b x

Como medida de la calidad del ajuste que proporciona y = f(x) como modelo para un conjunto de puntos

$$\{ (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \}$$

podemos adoptar la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada valor de *y* y el correspondiente valor asignado a y por el modelo, esto es, la suma de los errores cuadráticos:

$$S = [f(x_1) - y_1]^2 + [f(x_2) - y_2]^2 + \ldots + [f(x_n) - y_n]^2 = \sum_{i=1}^{n} [\, f(x_i) - y_i\,]^2$$

PREGUNTA: por qué, no se propone simplemente la suma de estas diferencias, en lugar de la suma de los cuadrados?
Gráficamente, S se puede interpretar como la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre la gráfica de f y los puntos del plano dados en el problema. En un modelo perfecto sería S = 0. Ahora bien, puesto que un modelo perfecto, en general, no es posible, nos conformamos con buscar un modelo que haga mínimo el valor de S. En Estadística se llama regresión o método de mínimos cuadrados al modelo f(x) que consigue el valor más pequeño posible para S. Probar que esta función f(x) minimiza realmente el valor de S exige minimizar una función de varias variables, por ejemplo en el caso lineal f(x) = a + b x, serán dos variables S(a, b), en el cuadrático $f(x) = a + b\,x + c\,x^2$, serán tres variables S(a, b, c), etc.

Caso lineal: la recta de mejor ajuste.

Los puntos obtenidos experimentalmente, a partir de los cuales se supuso la existencia de una proporción directa entre las magnitudes involucradas o modelo lineal que las relacione, por lo general no caerán todos sobre una recta. Por esto es que surge la necesidad de buscar valores de a y b de forma tal que la recta de ecuación y = a + b x se ajuste lo mas posible a los puntos obtenidos experimentalmente.
Si para un valor x_i el correspondiente valor de la medida es y_i, al utilizar la ecuación y = a + b x se obtendría para x_i el valor $a + b\,x_i$, a la diferencia o residuo lo indicamos $d_i = y_i - a - b\,x_i$. El residuo d_i representa (si se lo toma en valor absoluto) la distancia vertical entre el punto (x_i, y_i) y la recta de ecuación y = a + b x (ver Figura 1).
Los valores de a y b se encuentran analizando las primeras y segundas derivadas, esta forma de obtener a y b, la podrás estudiar en Matemática A. Si todavía no la cursaste, y los necesitas para el Laboratorio, puedes usar los valores de a y b, y luego ver como se obtienen al estudiar este

problema en Matemática A, ellos son:

$$b = [(\sum x_i) (\sum y_i) - n \sum x_i y_i] / [(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2]$$

$$a = [(\sum x_i) (\sum x_i y_i) - (\sum x_i^2)(\sum y_i)] / [(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2]$$

donde en todas las sumas i se extiende de i = 1 hasta i = n, con n igual al número de puntos. Muchas calculadoras científicas tienen estas fórmulas incorporadas, permitiendo encontrar a y b ingresando los datos y efectuando muy pocas operaciones.
La recta y = a + b x obtenida de esta forma se denomina recta de cuadrados mínimos o recta de regresión de los datos.

Ver los apunte sobre uso de Excel y planilla tipo y la justificación del método matemático en los apéndices

Apéndice 1
Uso de Excel

Apéndice 2
Planilla Excel tipo

Apéndice 3. Justificación del método

Determinación de los valores de a y b (MATEMATICA A)

Observamos que S(a, b) es una función polinómica de segundo orden en las dos variables a y b a valores no negativos, es decir $S(a, b) \geq 0$, por tratarse de suma de cuadrados. Queremos encontrar que valores de a y de b hacen que esta suma S(a, b) sea mínima.

$$S(a, b) = [a + b x_1 - y_1]^2 + [a + b x_2 - y_2]^2 + \ldots + [a + b x_n - y_n]^2 = \sum_{i=1}^{n} [a + b x_i - y_i]^2$$

Como S(a, b) es una función derivable, una forma de plantear condiciones necesarias de extremos relativos para funciones de dos variables, es comenzar determinando los puntos críticos, inspeccionando los valores donde se anulan las derivadas parciales $\partial S/ \partial a$ y $\partial S/ \partial b$.

$$\partial S/ \partial b = 2 (y_1 - a - b x_1) (- x_1) + \ldots + (y_N - a - b x_n) (- x_n)$$

Agrupando

$$\partial S/ \partial b = b (x_1^2 + \ldots + x_N^2) + a (x_1 + \ldots + x_n) - x_1 y_1 - \ldots - x_n y_n$$

$$\partial S/ \partial b = 0 \Rightarrow b (x_1^2 + \ldots + x_n^2) + a (x_1 + \ldots + x_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Esto se puede escribir:

$$b s_2 + a s_1 = t_1 \qquad (1)$$

con

$$s_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2; \qquad s_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad t_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\partial S/ \partial a = 2 (y_1 - a - b x_1) (- 1) + \ldots + 2 (y_n - a - b x_n) (- 1)$$

Agrupando

$$\partial S/ \partial a = b (x_1 + \ldots + x_n) + n a - y_1 - \ldots - y_n$$

$$\partial S/\partial a = 0 \quad \Rightarrow b\,(x_1 + \ldots + x_n) + n\,a = y_1 + \ldots + y_n$$

Esto se puede describir:

$$b\, s_1 + a\, s_0 = t_0 \qquad (2)$$

con

$$s_0 = n; \qquad t_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a, b)

$$\begin{cases} a\, s_1 + b\, s_2 = t_1 \\ a\, s_0 + b\, s_1 = t_0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtienen los puntos críticos (m, b), que en este caso es uno solo:

$$a = (s_2 t_0 - s_1 t_1)/(s_0 s_2 - s_1^2) = (\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \sum_{i=1}^{3} y_i - \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i=1}^{3} x_i y_i)/(3\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - -(\sum_{i=1}^{3} x_i)^2 \quad (3)$$

$$b = (s_0 t_1 - s_1 t_0)/(s_0 s_2 - s_1^2) = (3\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i=1}^{3} y_i))/(3\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - -(\sum_{i=1}^{3} x_i)^2 \quad (4)$$

Ahora se puede mostrar que $s_0 s_2 - s_1^2 \neq 0$, veremos un caso particular ($n = 3$) dado que la generalización es inmediata, para lo cual se puede observar que si:

1) Sumamos, admitiendo que no todas las abscisas coinciden:

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 2\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) > 0$$

$$2\sum_{i=1}^{3} x_i^2 > 2\sum_{i<j} x_i x_j \qquad (5)$$

2)

$$(\sum_{i=1}^{3} x_i)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$(\sum_{i=1}^{3} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$$

$$s_0 s_2 - s_1^2 = 3\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{3} x_i)^2 = 3\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j$$

$$s_0 s_2 - s_1^2 = 2\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j$$

$$s_0 s_2 - s_1^2 \neq 0$$

Se tiene un único punto crítico (a, b) dado por las ecuaciones (3) y (4), ahora se debe comprobar si se trata de un extremo relativo. Para ello inspeccionamos las derivadas segundas de S(a, b) y construimos el determinante D cuyo valor es:

$$D = (\partial^2 S/\partial a^2)(a, b)\,(\partial^2 S/\partial b^2)(a, b) - [(\partial^2 S/\partial a\,\partial b)(a,b)]^2$$

$$(\partial^2 S/\partial a^2)(a, b) = 3$$

$$(\partial^2 S / \partial b^2)(a, b) = x_1^2 + \ldots + x_3^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

$$(\partial^2 S / \partial a\, \partial b)(a,b) = (\partial^2 S / \partial b\, \partial a)(a,b) = x_1 + \ldots + x_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i$$

$$D = 3 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$D = 3 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 2 \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$D = 2 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 2 \sum_{i<j} x_i x_j > 0 \qquad \text{por (6)}$$

$\therefore$ $D > 0$ $\therefore$ el único punto crítico (a, b) define el mínimo relativo: S(a,b) y como S(a, b) es un polinomio no negativo, dicho mínimo es absoluto.