Laboratorio 3: Hidrodinámica. Principio de Bernoulli y el vaciado de una botella. Introducción a los parámetros efectivos.

Física experimental II. Dpto. de Física. Fac. Cs. Exactas. UNLP

11 de septiembre de 2023

Resumen

Vamos a estudiar la descarga de agua de un recipiente a través de un orificio aplicando el principio de Bernoulli y verificando su validez. Vamos a utilizar parámetros efectivos para describir los resultados.

[1]

[1] "La gran ola de Kanagawa". Impresión xilográfica. Katsushika Hokusai, 1830.

1. Agua [1]

1.1. *Alagados*

A partir de una gran inundación ocurrida en Roma en 1598 por el desborde del Tíber, Giovanni Fontana (1546-1614) quiso estimar la cantidad de agua que había provocado el evento. Sumando el área del cauce principal a la de sus afluentes llegó a un resultado de 500 cañas cuadradas[2]. Pero toda el agua implicada había fluido sin desbordar por debajo de un puente que encerraba 150 cañas cuadradas. Para explicar esto Fontana supuso que el agua se había comprimido. Un ex discípulo de Galileo, el clérigo Benedetto

Figura 1: Benedetto Castelli (1577-1643), Universidades de Pisa y Roma *La Sapienza*. Monje, matemático y físico lombardo. Fue discípulo y colaborador de Galileo y tutor de Evangelista Torricelli entre otros. Se lo reconoce como el primero en entender la conservación del caudal en flujos de agua. Insertos: bandera de Lombardía (izq.) y escudo de la universidad Roma *La Sapienza* (der.).

Figura 2: Restos del *Ponte Rotto*. Llamado originalmente Puente Emilio (*Pons Aemilius*), fue el primer puente de mampostería de Roma. Cruzaba el Tíber al norte del antiguo Ponte Sublicio. Fue remodelado y reconstruido varias veces hasta la inundación de 1598, que lo inutilizó para siempre.

Castelli (1578-1643, fig. 1) no estuvo de acuerdo con esta conclusión y declaró *“No entiendo que el agua sea como el algodón o la lana, materiales que puedan comprimirse y apretarse, como también ocurre con el aire”*[3] por lo que concluía *“Habiendo cabido toda la avenida (agua de la inundación) debajo del puente, sería suficiente un solo cauce con la misma capacidad de dicho puente, siempre que el agua escurriera con la misma velocidad que alcanzó debajo de él en ocasión de la inundación.”*. Básicamente se dio cuenta de

[2] La caña es una unidad de longitud que era utilizada principalmente en los territorios de la antigua Corona de Aragón. Como era común en esa época, su valor no estaba unificado y variaba entre 1,5 m y 1,8 m dependiendo de la ciudad.

[3] Efectivamente el agua, como la mayoría de los líquidos, es prácticamente incompresible.

que el caudal (la cantidad de agua por unidad de tiempo) no sólo depende del área del canal sino de la velocidad del flujo de agua. Castelli terminó encontrando la expresión final de su deducción en un lugar inesperado: una joyería. En ese momento los orfebres tenían una técnica para adelgazar hilos metálicos que consistía en hacer pasar el hilo grueso por un orificio más delgado. Castelli observó que el carrete que enrollaba el hilo adelgazado debía girar más rápido que el que desenrollaba el hilo grueso. Realizó mediciones y comprobó que la relación de velocidades de giro era igual a la relación de secciones entre los alambres. El caudal, en este caso la masa de hilo que se enrollaba, debía ser el mismo a ambos lados del orificio, por lo que la velocidad de los carretes debía ser distinta para compensar la disminución en el área del hilo. Luego de consultar su descubrimiento con Galileo llegó a la relación para el caudal Q con la velocidad v del flujo de agua y el área A del canal

$$Q = vA \tag{1}$$

donde el caudal $Q = dV/dt$ se define como la cantidad de fluido por unidad de tiempo que atraviesa una sección perpendicular a la dirección de flujo. Típicamente la cantidad de fluido se expresa en términos de su volumen V, aunque en ciertos casos puede expresarse en términos de la masa. Para el caudal volumétrico, si el área del canal es constante, se llega directamente a la expresión 1 con $v = dL/dt$ siendo L la distancia longitudinal recorrida por el fluido. Si bien esta relación fue enunciada antes por Leonardo Da Vinci y hoy puede parecer trivial, lleva el nombre de Ecuación de Castelli. El símbolo Q proviene de la definición del caudal en italiano *"quantità d'acqua portata"*.

1.2. *"É o mistério profundo, é o queira ou não queira"*. De nuevo Torricelli[2]

Evangelista Torricelli (1608-1647)[4] fue alumno de Castelli y cuidó de Galileo después de su condena por herejía y hasta su muerte. En 1641, Torricelli terminó de escribir un libro titulado: *"Del movimiento de los graves en caída natural y de los proyectiles"*, en el cual incluyó un capítulo sobre hidráulica. En éste plantea lo que ahora se conoce como el Principio de Torricelli: *"Las velocidades del agua que salen de un tanque perforado son proporcionales a la raíz cuadrada de las profundidades por debajo de la superficie libre de los orificios"*. Es decir, la velocidad de salida del líquido por un orificio del recipiente es proporcional a la raíz cuadrada de la altura h de la superficie del líquido respecto al orificio (fig. 3). Uno de los experimentos que llevaron a Torricelli a esta conclusión consistía en un depósito de agua con orificio de desagote hacia arriba. Si tenía razón, el chorro ascendente debería alcanzar, en ausencia de disipación, la altura de la superficie del agua (fig. 4) debido a que su velocidad de salida v_d sería la de una caída libre desde h

$$v_d = \sqrt{2gh} \tag{2}$$

donde g es la aceleración gravitatoria. Lo que en realidad midió es que el chorro llegaba a una altura algo menor, lo que atribuyó *"En parte al impedimento del aire que se opone a cualquier cuerpo móvil, y en parte también a la misma agua que, cuando desde la cumbre C emprende el camino de regreso, se obstaculiza y retarda a su parte ascendente, no permitiendo que las gotas que suben puedan elevarse hasta ese nivel que alcanzaron con su propio ímpetu"*, algo así como una combinación entre resistencia del aire y el efecto del agua que baja desde el punto más alto.

[4] Tal vez lo recuerden de prácticas como "Laboratorio 2: Hidrostática. Principio de Arquímedes y relación presión-altura"

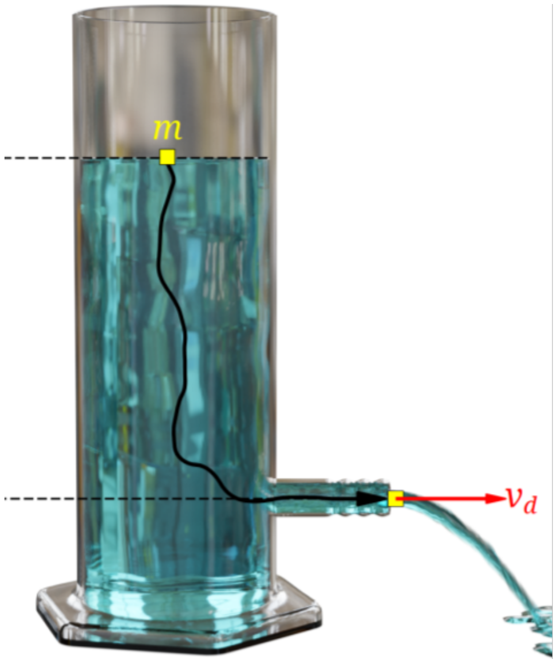

Figura 3: Desagote de un recipiente a través de un orificio. Torricelli propuso que la velocidad de salida v_d es proporcional a la raíz de la altura de la superficie superior respecto al orificio. Lo consideró como una caída libre de una masa m.

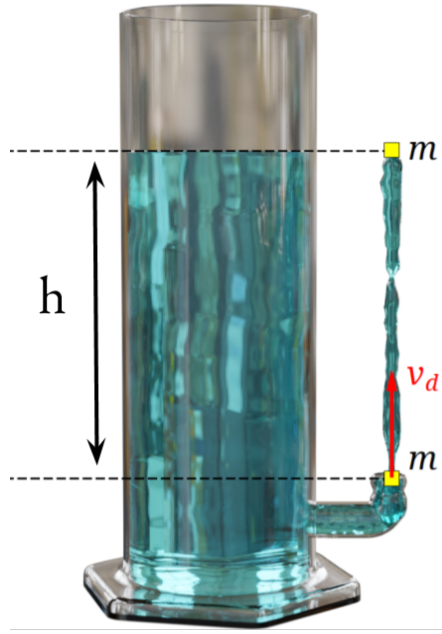

Figura 4: Experimento ideal de Torricelli. El chorro de agua ascendente llega a la misma altura que la superficie libre del líquido en el recipiente como si fuera un tiro vertical de una masa m.

1.3. "*Eu sempre tive uma certeza que só me deu desilusão*" . Newton también se equivoca

Sir Isaac Newton, en el apogeo de su productividad, no fue ajeno a los misterios de la hidrodinámica. Inicialmente, y a raíz de un error de cálculo, aseveró en la primera edición de sus *Principa:"Está comprobado que la cantidad de agua que sale en un tiempo determinado por un orificio practicado en el fondo de un tanque es igual a la cantidad que escurriendo libremente con la misma velocidad, pasaría en el mismo tiempo a través de un orificio circular cuyo diámetro esté en razón de 21 a 25 con el diámetro anterior. Por tanto, el agua corriente, al cruzar el primer orificio, tiene una velocidad poco más o menos igual a la que adquiriría un cuerpo pesado al caer de una altura equivalente a la mitad de la del agua estancada en el tanque"*. Básicamente estaba afirmando que la presión de salida a través de un orificio en el fondo de un tanque era equivalente al peso de una columna de agua del doble de altura que la real. Eventualmente parece haberse dado cuenta de su error, ya que la demostración de esta afirmación fue suprimida de la segunda edición de los *Principia* en donde toma la demostración de Torricelli como punto de partida para su segundo error: la catarata.

Para explicar el principio de Torricelli, Newton lo tomó literalmente y propuso como hipótesis de trabajo que el líquido en el tanque "caía" desde la superficie libre hasta el orificio a modo de catarata, posiblemente motivado por sus resistencia a tratar los problemas en términos energéticos y tender a resolverlos mediante la conservación de la cantidad de movimiento, lo que para él era el principio más fundamental. El prestigio de Newton hizo que una buena parte de la comunidad científica adoptara un fuerte "cataraterismo”, superando con creces al de su creador. Pero también hubo detractores, entre los que se destacó un prominente matemático suizo llamado Johann Bernoulli. El contrargumento de Bernoulli fue robusto: si el agua llegaba de la superficie al agujero en caída libre mediante una catarata que ocupaba el centro del recipiente, la presión dentro de la misma sería nula y, en consecuencia, el agua en reposo fuera de la catarata se precipitaría hacia su centro, fenómeno que no se observaba.

1.4. Don de fluir. Viscosidad y *vena contracta*

Para reivindicar un poco a Newton en el rubro de la hidrodinámica hay que decir que la otra observación que menciona en los *Principia* fue muy precisa. El británico notó que cuando se realizan los experimentos, el caudal de desagote del recipiente es notoriamente menor al predicho por el principio de Torricelli. Newton se tomó el trabajo de medir el ancho del chorro de agua inmediatamente después de la salida y comprobó que era sistemáticamente menor al diámetro del orificio. Este efecto se conoce como *vena contracta* y se debe a la imposibilidad del fluido para seguir en su trayectoria un cambio abrupto en la dirección de las paredes del recipiente (fig. 5). Para tenerlo en cuenta, se incorpora a los cálculos un coeficiente de contracción C_c que relaciona la sección del chorro de salida A_c con la sección del orificio A_o, o lo que es lo mismo, el cuadrado de sus diámetros d

$$C_c = \frac{A_c}{A_o} = \frac{d_c^2}{d_o^2} \tag{3}$$

Así, C_c=1 implica que no hay contracción del flujo y el efecto de *vena contracta* no está presente, mientras que cuando más cercano a cero sea C_c, mayor es el efecto. Para orificios circulares, el agua suele manifestar valores de C_c del orden de 0,65.
Una forma de minimizar el estrangulamiento del chorro de agua es adosar una sección de cañería de largo entre 2 y 3 veces el diámetro del orificio, de manera de permitir la formación de líneas de descarga paralelas. Adicionalmente se puede utilizar una conexión de salida con esquinas menos pronunciadas (fig. 6).

Además del *vena contracta*, la interacción disipativa entre las partículas del propio fluido es no nula y puede ser notoria dependiendo de la sustancia y las condiciones, principalmente de la temperatura. Esta interacción se manifiesta macroscópiamente como una resistencia al fluir que se llama **viscosidad** y su unidad SI es el Pa.s (pascal segundo) aunque los valores típicos se expresan en mPa.s. Como referencia, la viscosidad del agua a 20º C es 1,0016 mPa.s mientras que a 90º C baja a 0,314 mPa.s, y la viscosidad del aceite a 20º C es de 84 mPa.s.
En el caso de la descarga de un recipiente o el paso de un fluido por una cañería, la viscosidad actúa disminuyendo la velocidad del fluido. Así es que se define un coeficiente de velocidad C_v a partir de la velocidad real v_r y la esperada sin viscosidad v_i

$$C_v = \frac{v_r}{v_i} \tag{4}$$

De manera que si la viscosidad es despreciable C_v=1. Siendo el agua poco viscosa, suele manifestar valores de C_v de 0,95 o superiores.
Estos coeficientes (y eventualmente los correspondientes a otros efectos) se pueden combinar para obtener el coeficiente de descarga $C_d = C_c C_v ...$ de manera que se pueda calcular un área efectiva del orificio de salida A_{ef} como

$$A_{ef} = C_d A_o \tag{5}$$

Todos estos aspectos de la descarga de un recipiente están muy bien desarrollados en inglés en el sitio

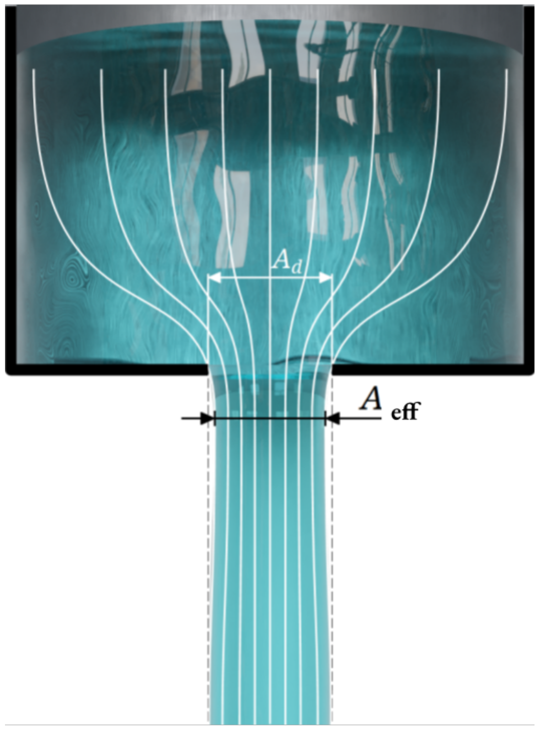

Figura 5: Efecto de *vena contracta* en el desagote de un recipiente. La sección del chorro A_c (A_{eff} en la figura) es menor que la sección real del orificio de salida A_o (A_d en la figura).

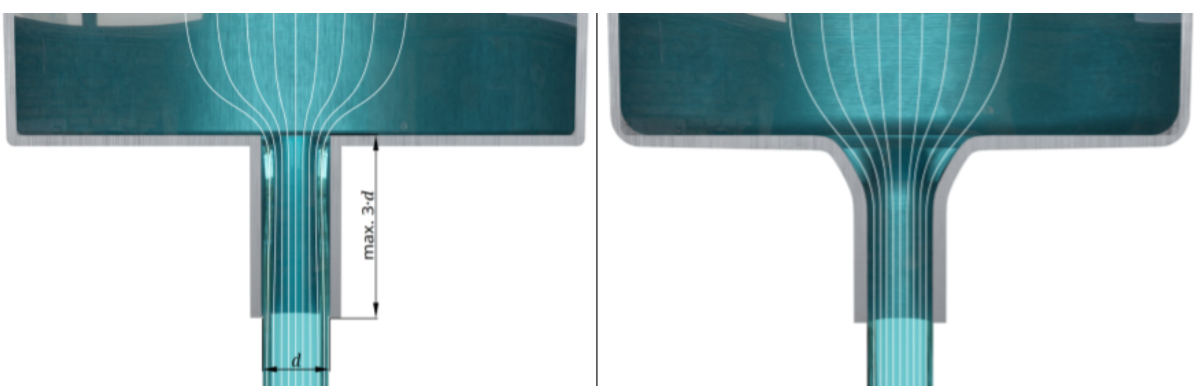

Figura 6: Métodos de aumentar el coeficiente de contracción.Izquierda: desagüe con una cañería corta (largo $l < 3d$, con d el diámetro del orificio de salida). Derecha: conexión de salida con esquinas suavizadas.

Discharge of liquids (Torricelli's law) de donde hemos tomado prestadas las lindas figuras de esta sección. Vale aclarar que, si bien el coeficiente de velocidad podría ser estimado *a priori* conociendo la viscosidad del fluido y la geometría del canal de descarga, y el coeficiente de contracción se puede determinar midiendo la sección del chorro de salida, en general, el coeficiente de descarga se determina *a posteriori* comparando la descarga medida con la ideal. Así es que A_{ef} se define como el parámetro que permite ajustar a los datos reales, la predicción teórica basada en una hipótesis de comportamiento ideal *i. e.* el área que tendría que tener el orificio de salida para obtener la descarga observada con un fluido ideal.

2. *Family business.* La saga Bernoulli[3]

Daniel Bernoulli (fig. 8) nació en 1700 en una familia Suiza ya famosa por incluir varios matemáticos de prestigio, de los primeros en desarrollar el cálculo infinitesimal de Leibniz. Su padre, Johann (1667-1748, fig. 7), el anticataratas, fue jefe del departamento de matemáticas de la Universidad de Groninga, en los Países Bajos. La familia además, se caracterizó por sus enfrentamientos internos a los cuales Daniel no fue ajeno. Johann Bernoulli, por ejemplo, aplicó varias veces para la posición de profesor de matemáticas en Basilea, pero el puesto le fue negado por la influencia de su hermano Jakob, que evidentemente lo prefería lejos. Al morir Jakob de tuberculosis, Johann obtuvo la posición rápidamente.

2.1. En la cabeza tenía la voz de mi viejo, que me sonaba como un rulo de tambor

El padre de Daniel le quiso planear la vida. Le eligió esposa y decidió que tenía que ser mercader. Exactamente lo mismo que su padre había hecho con él, con exactamente el mismo resultado. De todas maneras Daniel entró tempranamente en contacto con los conocimientos matemáticos que habían hecho famoso a su progenitor. Para cuando tenía 13 años, Johann desistió de hacerlo mercader pero se opuso terminantemente a que se dedicara a las matemáticas ya que no era un área en la que se ganara dinero. Así es que decretó que Daniel debería estudiar medicina, cosa que hizo durante unos años.
Eventualmente el padre de Daniel accedió a instruirlo formalmente en matemáticas. Durante esa formación estudiaron entre otras cosas un tema que sería fundamental para sus futuros descubrimientos, la "conservación de la *vis viva*", el origen de lo que hoy conocemos como "principio de la conservación de la energía", una pavada.
Eventualmente, el joven Bernoulli (de ahora en más Bernoulli a secas) se interesó mucho en el trabajo del médico inglés William Harvey (1578-1657, fig. 9) que en su obra de 1628 "*Un estudio anatómico sobre los movimientos del corazón y la sangre de los animales*" fue el primero en plantear, basado en experimentos, que la sangre era bombeada por el corazón a través del sistema circulatorio (sorprendente lo que tardamos en darnos cuenta de eso). Bernoulli vio en este tópico la oportunidad de combinar su interés por las matemáticas y el movimiento de los fluidos, a la vez que obtenía el grado en medicina que tanto añoraba... su padre.
A los 21 años, Daniel finaliza sus estudios en medicina y se pone a buscar un puesto académico que le permita dedicarse a investigar las reglas fundamentales de la hidrodinámica, un tema que hasta el momento había complicado tanto a su padre como al mismo Newton. La relación de los Bernoulli con Newton no era de las mejores debido a una serie de enfrentamientos académicos, principalmente a que estos nunca le dieron crédito al inglés por el desarrollo del cálculo, atribuyendo todo el mérito a su rival Leibniz.

Figura 7: **Johann Bernoulli**(1667-1748), Universidad de Basilea. Matemático, físico y médico suizo. Realizó aportes significativos al cálculo diferencial de Leibinz y a la hidrodinámica en colaboración y competencia con su hijo Daniel. Insertos: Isotipo de la Universidad de Basilea (ar. iz.), Bandera de Suiza (ab. iz.) y escudo de armas de la familida Bernoulli (ar. de.).

Figura 8: **Daniel Bernoulli** (1700-1782), Universidad de Basilea. Matemático, estadístico, físico y médico suizo. Destacó en matemática pura y aplicada, principalmente en estadística y probabilidad. Hizo importantes contribuciones en hidrodinámica y elasticidad. Insertos: Isotipo de la Universidad de Basilea (ar. iz.), Bandera de Suiza (ab. iz.), Portada de *Hydrodynamica* (1738, ab. de.) y escudo de armas de la familida Bernoulli (ar. de.).

2.2. Queso ruso

Luego de una estadía de dos años en Padua, Italia, Daniel regresa a Basilea para encontrar una carta de la emperatriz Catalina I (1684-1727, fig. 10) de Rusia invitándolo como profesor de matemáticas de la Academia Imperial de San Petersburgo. Si bien inicialmente no estaba seguro de aceptar una oferta de trabajo en un lugar tan remoto, Daniel aceptó cuando Nikolas, su hermano mayor, se ofreció a acompañarlo. Lamentablemente Nikolas murió de tuberculosis al año siguiente. Daniel pensó en regresar a Basiela, pero decidió quedarse cuando su padre sugirió que uno de sus estudiantes, un tal Leonhard Euler (1707-1783, fig. 11), podía viajar a Rusia para ser su asistente.
Bernoulli y Euler trabajaron juntos para entender el comportamiento dinámicos de los fluidos, en particular la relación entre la velocidad de flujo de la sangre y la presión arterial. Para investigar esto, experimentaron insertando tubos delgados de vidrio en las paredes de cañerías para determinar la presión en la misma a partir de la altura que alcanzaba el líquido en el tubo (fig. 12).

Figura 9: William Harvey (1578-1657). Médico inglés a quien se atribuye la primera descripción correcta de la función del sistema circulatorio. Además, fue el primer médico moderno en mencionar el concepto de ovocito mediante la sentencia latina «*ex ovo omnia*» (Todo procede de un huevo). No lo observó como tal, pero fue el primero en sugerir que los seres humanos y otros mamíferos albergan una especie de "huevo" que contiene al individuo sucesor.

Figura 10: Catalina I de Rusia(1684-1727). Primera Emperatriz del Imperio Ruso. Continuó la obra de su esposo, Pedro I modernizando el Imperio. Apoyó fuertemente a la Academia de Ciencias de San Petersburgo incorporando profesores extranjeros como Bernoulli y Euler. Insertos: Escudo de armas y bandera del Imperio Ruso.

Pronto los médicos por toda Europa estaban usando este método para medir la presión sanguínea de sus pacientes, clavándoles delgados capilares de vidrio en las arterias. Pasaron 170 años hasta que en 1869 el bueno de Scipione Riva-Rocci desarrolló una versión simple de utilizar del esfigmomanómetro, el método para medir la presión que se mantiene hasta hoy. Sólo por eso merece que incluyamos su foto en este documento como agradecimiento (fig.13). Aún así, el sistema de Bernoulli y Euler es la base del funcionamiento de los tubos de Pitot, utilizados actualmente como velocímetros en las aeronaves y llave de flujo en los calefones (fig. 14).

Figura 11: Leonhard Paul Euler ([oiler] en español) (1707-1783). Matemático y físico suizo. Considerado el principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos, conocido entre muchas cosas por el número e.Insertos: bandera de Suiza (ab. iz.) y escudo de la Academia de Ciencias de San Petersburgo (hoy Academia de Ciencias de Rusia).

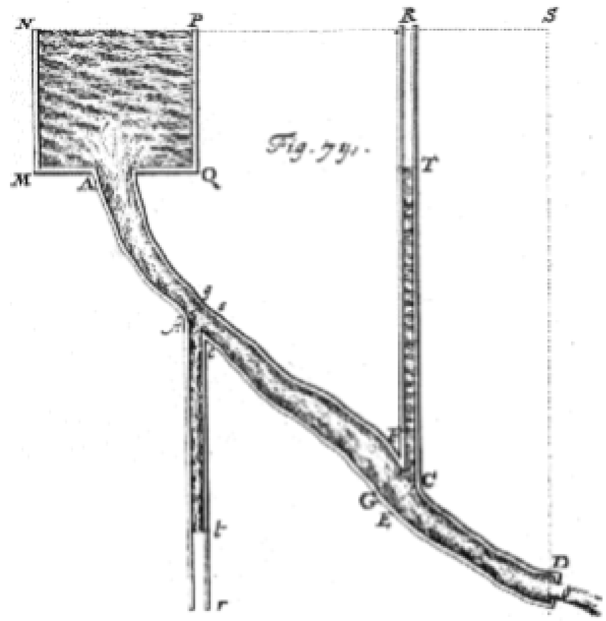

Figura 12: Esquema original de Bernoulli describiendo el método para medir la presión de fluido en una cañería.

2.3. *The unwritten law*

Bernoulli continua desarrollando su teoría hidrodinámica retomando su trabajo previo con el concepto de la conservación de la energía. Al aplicar este principio a los fluidos en combinación con la mecánica newtoniana, propone que al balance entre la energía potencial gravitatoria y la energía cinética corresponde agregar un término dependiente de la presión, ya que había descubierto con sus experimentos previos que, al aumentar la velocidad de flujo, la presión disminuía. Así llega a la expresión

$$\frac{p}{\rho} = gh + \frac{v^2}{2} \tag{6}$$

donde p es la presión, ρ es la densidad del fluido, g la aceleración gravitatoria, h la altura de la columna de líquido y v la velocidad de salida. Esta disminución de presión al comprimirse las líneas de flujo puede parecer antiintuitiva, pero se vuelve más comprensible si recordamos que la presión de un fluido está asociada a la energía cinética da las partículas que lo conforman. Así, la presión se puede asociar a una

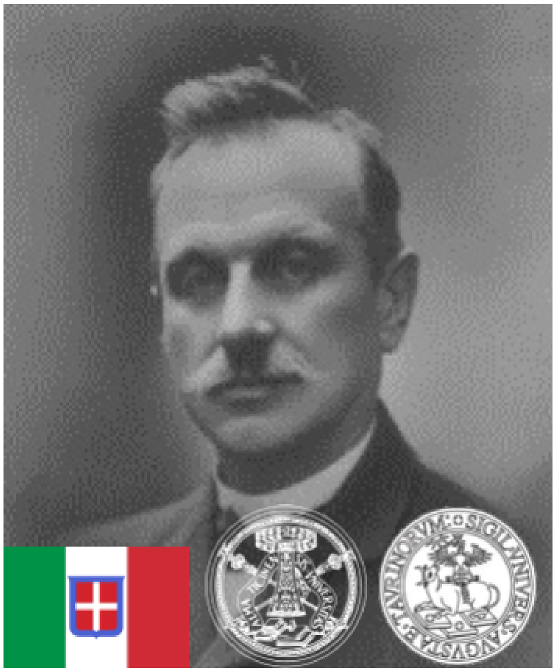

Figura 13: Scipione Riva-Rocci (1863-1937). Médico italiano, internista y pediatra. Desarrolló el primer esfigmomanómetro de uso práctico para medir la presión arterial. Insertos: bandera del Reino de Italia (iz.)y escudos de las universidades de Pavía (cen.) y Turín (de.).

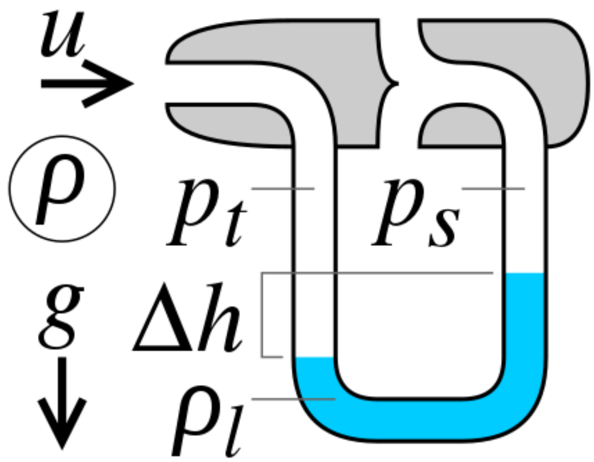

Figura 14: Tubo de Pitot. El aire de densidad ρ que entra por el orificio frontal a velocidad u genera un presión de estancamiento p_t. La diferencia de p_t con la presión estática p_s genera una diferencia de altura Δh en el líquido de densidad ρ_l bajo una aceleración gravitatoria g.

densidad de energía interna y resulta natural incluir este nuevo grado de libertad en el balance de la conservación. La "densidad de energía" asociada al flujo ($v^2/2$) queda relacionada a la gravitatoria (gh) y a la hidrostática (p/ρ). Así, Bernoulli llega a explicar la afirmación de Newton sobre la doble columna de presión en el vaciado del recipiente como la suma de las energías hidrostática y potencial del fluido cuando este se encuentra en movimiento. Sus principales resultados son publicados en 1738 en su libro *Hydrodynamica*.

La versión actual de la ley (ver ecuación 7) sin embargo, fue formulada por el padre de Daniel, que poseía una mejor formación matemática. Haciendo honor a la tradición familiar de joderse la vida entre parientes, Johann publicó la ecuación en una obra llamada *Hydraulica* a la que le atribuyó un año de publicación falso, anterior a *Hydrodynamica* para no tener que reconocer los aportes de su hijo. El conflicto por esta publicación escaló hasta arrastrar al mismo Euler y significó la ruptura definitiva entre Daniel y su padre.

3. Experimento

El arreglo básico para el experimento (fig. 15) consiste en una botella de plástico de forma cilíndrica y paredes lisas (botella de gaseosa de 2 o más litros o sifón de soda descartable). Dicha botella debe cortarse,

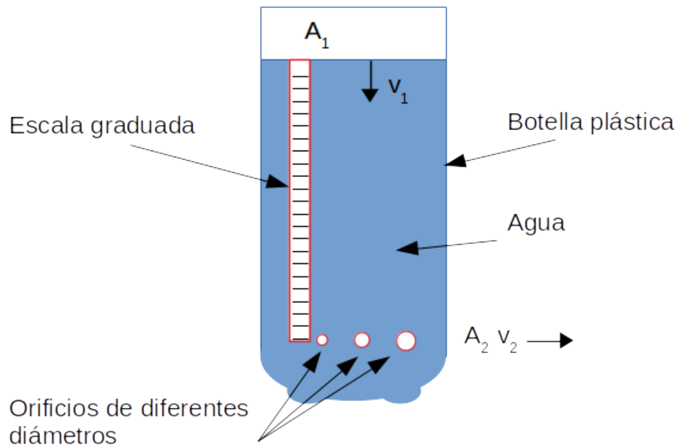

Figura 15: Diagrama del sistema a utilizar en el ensayo. El recipiente transparente de sección constante se debe perforar en la base. A_1 es el área de la superficie libre del agua, v_1 la velocidad del nivel de llenado, A_2 es el área del orificio de salida y v_2 la velocidad de salida del fluido.

en su parte superior, donde comienza la parte cilíndrica. Cerca de la base de la botella pero en la zona donde se mantiene la forma cilíndrica se deben practicar al menos tres orificios de diferentes diámetros con el centro a la misma altura. Los diámetros de los orificios deben estar comprendidos entre 4 mm y 13 mm. También debe dibujarse o pegarse una escala graduada o regla para poder medir alturas desde los centros de las perforaciones hasta arriba de la botella.

La altura a la que se llena la botella con agua debe ser tal que los tiempos de drenaje sean fáciles de medir. Para una botella de gaseosa y orificios de las medidas mencionadas los tiempos estarán aproximadamente entre 2 o 3 minutos y decenas de segundos. Los agujeros que no son utilizados se deben tapar con cinta adhesiva mientras que el orificio que se va a utilizar en el ensayo se puede tapar con el dedo mientras se llena la botella hasta el nivel deseado con una jarra.
Una vez llena la botella se deberá utilizar el celular para grabar un video. Se deberá fijar el celular para tener una grabación estable y poder ver la posición del agua. Mediante algún software de edición de video se podrá construir una tabla con datos de altura h en función del tiempo. Es altamente recomendable utilizar el software especializado Tracker video analysis [4]. Éste es una herramienta para análisis de videos y modelado. En caso de utilizarlo no es necesaria la escala graduada en la botella.
Como método alternativo para determinar $h(t)$ algunos grupos podrán utilizar un sensor de posición por sonar que deberán colocar por encima de la botella, apuntando a la superficie del agua.

4. Análisis

Para hallar una expresión de la altura del líquido en función del tiempo en esta experiencia, se usa la ley de Bernoulli junto a la ley de conservación de la masa y algunas ecuaciones básicas de cinemática. Para un fluido no viscoso, incompresible, la ley de Bernoulli se expresa a menudo como:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \rho g y_2 \tag{7}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, p_n es la presión interna del fluido en el punto n en el sistema, ρ es la densidad del fluido, v_n es la velocidad del fluido en el punto n, e y_n es la altura del fluido en el punto n desde un origen prefijado. Para el sistema analizado en este experimento (fig. 15), el origen se ubica en el orificio sobre el costado en la parte inferior y el sentido positivo es hacia arriba.

Para el flujo estacionario de fluido incompresible, la conservación de la masa, expresada como una ecuación de continuidad, establece que el caudal debe ser constante (el volumen de agua que pasa por cada punto debe ser el mismo). La ecuación de continuidad para los puntos 1 y 2 de la botella se expresa como:

$$\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 \tag{8}$$

siendo v_1 y v_2 la velocidad del agua en los puntos 1 y 2, respectivamente.

Como la botella está abierta, el agua está expuesta a la atmósfera en la superficie superior y en el orificio del costado (puntos 1 y 2) y la presión en esos puntos es la presión atmosférica ($p_1 = p_2 = p_{atm}$). Así, aplicando la ecuación 7 a los puntos 1 y 2, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g h = \tfrac{1}{2}\rho {v_2}^2 \tag{9}$$

Bajo las condiciones de este experimento, la densidad del agua es constante en todo el fluido. Las áreas de la parte cilíndrica de la botella y del orificio de salida son $A_1 = (\pi/4)D^2$ y $A_2 = (\pi/4)d^2$, respectivamente con D el diámetro en 1 y d el diámetro del orificio de salida. Resolviendo la ecuación 8 para v_2 y sustituyendo el resultado en la ecuación 9, la expresión para la velocidad de la superficie libre del agua mientras la botella se vacía es

$$v_1 = \left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2gh} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta las dimensiones con las que trabajamos, se puede despreciar el término unitario dentro del paréntesis, con lo cual la velocidad v_1 queda

$$v_1 = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh} \tag{11}$$

De la misma manera se podría resolver la ecuación 8 para v_1 y se llegaría a que la velocidad v_2 es

$$v_2 = \sqrt{2gh} \tag{12}$$

De la ecuación 11 se puede ver que la velocidad de la superficie libre del agua no es constante, ya que depende de la altura de la columna de agua. Si tomamos h como la altura inicial, ésta es la velocidad a la cual comienza a moverse el fluido en régimen de Bernoulli. Debemos aclarar que existe un estado transitorio durante el cual el fluido alcanza esta velocidad desde el estado inicial de reposo. No consideraremos este tiempo y lo supondremos despreciable. En nuestro estudio supondremos que el fluido comienza a moverse con velocidad v_1 al permitir que la botella comience a vaciarse.

Operando sobre de la aceleración en el eje y de la superficie del agua

$$a_y = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_1}{dh}\,\frac{dh}{dt} = \frac{dv_1}{dh}\,v_1 = \frac{d^2}{D^2}\,\frac{2g}{2\sqrt{2gh}}\,\frac{d^2}{D^2}\,\sqrt{2gh} = \frac{d^4}{D^4}g = cte \tag{13}$$

vemos que la aceleración es constante. Depende de la aceleración de la gravedad g y de la relación de los diámetros a la cuarta potencia. Además es positiva por lo que la velocidad v_1 que es negativa, irá disminuyendo en módulo hasta llegar a cero en la parte más baja.

Esto prueba que la superficie libre del agua se desplaza con aceleración constante, por lo que pueden usarse las ecuaciones básicas de cinemática para describir su movimiento

$$v_y = v_{0y} + a_y t \tag{14}$$

$$h = h_0 + v_{0y} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2 \tag{15}$$

Tomando $v_{0y} = -v_1$ (tener en cuenta que la expresión 11 representa al módulo de la velocidad de la superficie libre) la expresión final queda

$$h(t) = h_0 - \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh_0}\, t + \tfrac{1}{2} \frac{d^4}{D^4} g\, t^2 \tag{16}$$

Así es que, de cumplirse la ley de Bernoulli, se espera una dependencia cuadrática del nivel de líquido en la botella con el tiempo cuyos coeficientes quedan definidos por las condiciones iniciales, el diámetro de las aberturas y la aceleración de la gravedad.

4.1. Validando el modelo

Se deberán comparar los datos con la predicción teórica. Para esto, además de comparar gráficamente, se deben ajustar los datos con una expresión adecuada y comparar los coeficientes con la función $h(t)$ predicha a partir del modelo. En el caso de observar un comportamiento que no concuerde con esta predicción, se deberán tener en cuenta otros efectos no considerados en el modelo y adecuarlo mediante coeficientes para encontrar un valor efectivo para el área del orificio.

Referencias

[1] Edmundo Pedroza González, Josefina Ortiz Medel, and Francisco Martínez González. Historia del teorema de bernoulli. *Acta Universitaria*, 17(1):39–45, 2007.

[2] Enzo Levi Lattes. *El agua según la ciencia*. IMTA, 2001.

[3] Dr D. A. Quinney-Keele University. *"Daniel Bernoulli and the making of the fluid equation" | Plus Magazine*, 1997 (consultado 17 de septiembre de 2020).

[4] *TRACKER. Video analysis and modeling tool.*